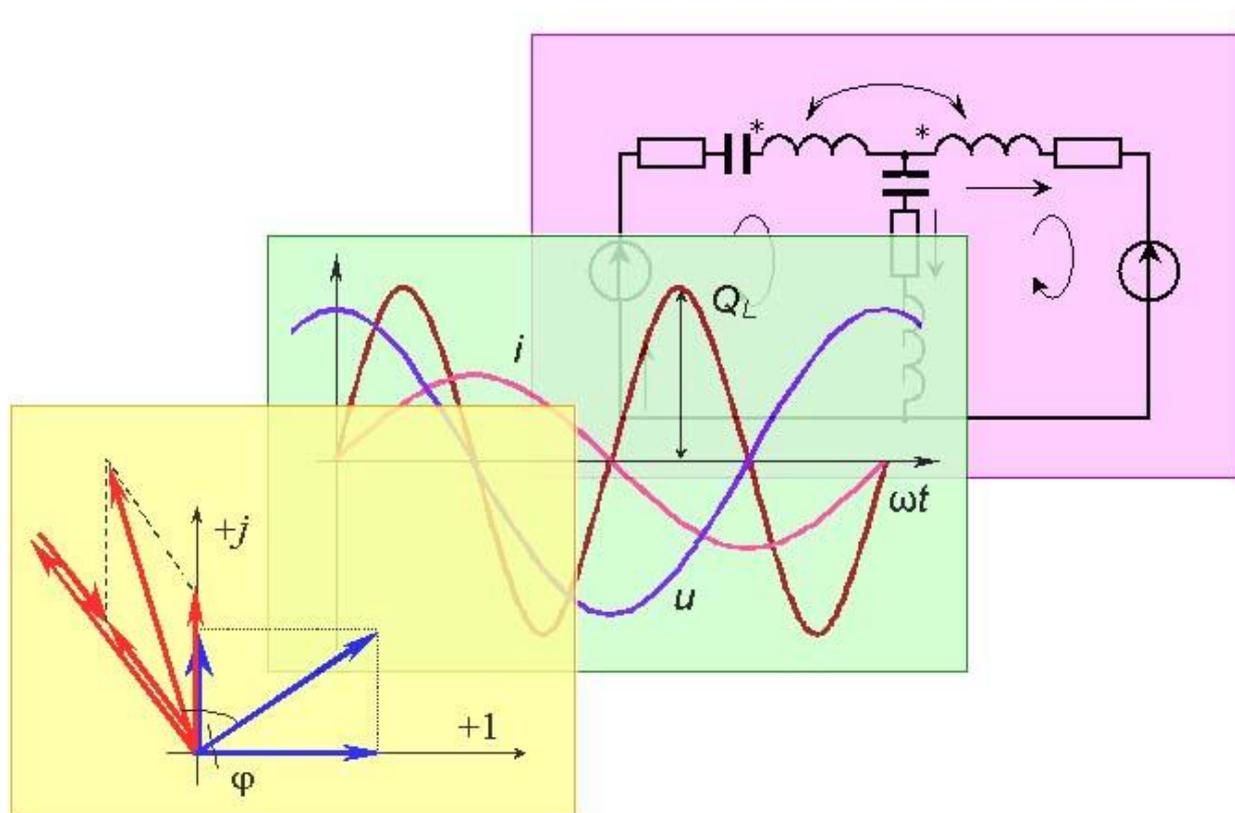


В.С. ЛУКМАНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



УФА 2005

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический
университет

В.С. Лукманов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Часть I

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*Допущено Научно-методическим советом
Министерства образования и науки РФ
по электротехнике и электронике в качестве учебного пособия
по теоретическим основам электротехники
для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки
140600 «Электротехника, электромеханика, электротехнологии»
специальности 140601 – «Электромеханика»;
по направлению подготовки 140200 «Электроэнергетика»
специальности 140205 – «Электроэнергетические системы и сети»*

УФА 2005

УДК 621.3 (07)

ББК 31.2 (Я7)

Л 84

Л 84 Лукманов В.С. Теоретические основы электротехники. Часть I. Теория линейных электрических цепей: Учебное пособие /В.С.Лукманов; Уфимск. гос. авиац.техн. ун-т. – Уфа: УГАТУ, 2005. – 120 с. ISBN 5-86911-543-4

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теоретические основы электротехники» направления подготовки 140600 «Электротехника, электромеханика, электротехнологии» специальности 140601 – «Электромеханика»; направления подготовки 140200 «Электроэнергетика» специальности 140205 – «Электроэнергетические системы и сети».

Представлен материал по первой части дисциплины «Теоретические основы электротехники», который охватывает следующие темы: законы электротехники, методы расчета линейных электрических цепей, комплексный метод расчета цепей при синусоидальных воздействиях, резонансные явления в линейных электрических цепях, электрические цепи с взаимной индукцией, методы расчета трехфазных цепей, расчет цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

Предназначено для студентов вузов электротехнических специальностей, изучающих теоретические основы электротехники как по очной, так и по заочной системам обучения.

Табл. 1. Ил. 93. Библиогр.: 12.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. МЭИ(ГУ) Гусев Г.Г.,

канд. техн. наук, доцент МЭИ(ГУ)

Шакирзянов Ф.Н.

ББК 31.2 (Я7)

ISBN 5-86911-543-4

© В.С.Лукманов, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.....	6
Глава 1. Линейные электрические цепи постоянного тока	8
1.1. Определения.....	8
1.2. Источники электрической энергии.....	9
1.3. Основные преобразования схем, используемые при анализе электрических цепей.....	12
1.4. Законы электрических цепей.....	14
1.5. Расчет электрической цепи по законам Кирхгофа.....	16
1.6. Метод контурных токов.....	18
1.7. Метод узловых потенциалов.....	21
1.8. Принцип наложения и метод наложения.....	23
1.9. Метод эквивалентного генератора	25
1.10. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке.....	30
1.11. Метод пропорциональных величин.....	31
1.12. Теорема о линейных соотношениях.....	32
1.13. Теорема компенсации.....	33
1.14. Энергетический баланс в электрических цепях.....	34
Глава 2. Электрические цепи однофазного синусоидального тока ..	35
2.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины.....	35
2.2. Действующее и среднее значения синусоидально из- меняющейся величины.....	36
2.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы.....	37
2.4. Изображение синусоидальных токов, напряжений, ЭДС с помощью вращающихся векторов. Векторная диаграмма.....	38
2.5. Активное сопротивление в цепи синусоидального тока.....	38
2.6. Индуктивность в цепи синусоидального тока.....	39
2.7. Емкость в цепи синусоидального тока.....	40
2.8. Установившийся синусоидальный ток в цепи с по- следовательным соединением участков R , L , C	41
2.9. Установившийся синусоидальный ток в цепи с па- раллельным соединением участков G , L и C	43

Глава 3. Комплексный метод расчета электрических цепей при установившемся синусоидальном токе.....	46
3.1. Комплексные числа.....	46
3.2. Изображение синусоидально изменяющихся величин на комплексной плоскости.....	48
3.3. Выражение для производной.....	49
3.4. Выражение для интеграла.....	50
3.5. Алгебраизация уравнений.....	51
3.6. Закон Ома для цепи синусоидального тока. Комплексное сопротивление.....	52
3.7. Комплексная проводимость.....	53
3.8. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей.....	53
3.9. Законы Кирхгофа в комплексной форме.....	54
3.10. Активная, реактивная и полная мощности.....	54
3.11. Расчет сложных электрических цепей комплексным методом.....	57
Глава 4. Резонансные явления в линейных электрических цепях.....	61
4.1. Резонанс напряжений.....	61
4.2. Резонанс токов.....	68
4.3. Резонанс в разветвленных цепях.....	71
4.4. Резонанс в цепях без потерь (чисто реактивные цепи).....	72
Глава 5. Расчет электрических цепей при наличии в них магнитосвязанных катушек.....	74
5.1. Определения. Физическая модель.....	74
5.2. Расчет последовательного соединения двух магнитосвязанных катушек.....	76
5.3. Расчет разветвленных цепей при наличии в них магнитосвязанных катушек.....	77
5.4. «Развязывание» магнитосвязанных цепей.....	80
5.5. Трансформатор с линейными характеристиками.....	81
Глава 6. Расчет трёхфазных цепей.....	86
6.1. Трёхфазная система ЭДС.....	86
6.2. Общие положения и допущения при расчете трёхфазных цепей.....	87

6.3.	Расчет соединения звезда - звезда с нулевым проводом.....	87
6.4.	Расчет соединения звезда - звезда без нулевого провода.....	90
6.5.	Расчет соединения треугольник - треугольник.....	92
6.6.	Активная, реактивная и полная мощности трёхфазной цепи.....	93
6.7.	Измерение активной мощности в трёхфазной цепи....	93
Глава 7.	Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС, напряжениях и токах.....	96
7.1.	Алгоритм расчета.....	96
7.2.	Представление периодической несинусоидальной функции в виде ряда Фурье.....	97
7.3.	Гармонический состав кривой в некоторых случаях симметрии.....	98
7.4.	Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении.....	99
7.5.	Действующее значение периодических несинусоидальных токов, напряжений, ЭДС.....	101
7.6.	Определение мощности в электрических цепях с периодическими токами, напряжениями, ЭДС.....	101
Глоссарий.....		103
Список литературы.....		118

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Теоретические основы электротехники» занимает основное место среди общетехнических дисциплин, определяющих теоретический уровень профессиональной подготовки инженеров-электриков.

Предмет курса составляют электромагнитные явления и их прикладное применение для создания, передачи и распределения электрической энергии с помощью универсального носителя – электромагнитного поля – для решения проблем электротехники, электромеханики, электротехнологии. Курс ТОЭ как базовый курс обеспечивает комплексную подготовку будущего специалиста: формирует профессиональную подготовку, развивает творческие способности, учит формулировать и решать на высоком и перспективном научном уровне проблемы приобретаемой специальности, творчески применять и самостоятельно повышать свои знания.

Содержанием дисциплины «Теоретические основы электротехники» являются теоретические аспекты практического использования электротехники.

Основная задача курса ТОЭ состоит в изучении одной из форм материи – электромагнитного поля и его проявлений в различных устройствах техники, усвоении современных методов моделирования электромагнитных процессов, методов анализа, синтеза и расчета электрических цепей, электрических и магнитных полей, знание которых необходимо для понимания и успешного решения инженерных проблем будущей специальности. Изучение теоретической электротехники способствует выработке развитых представлений о методах применения теории электромагнитных явлений и методологии курса ТОЭ в специальных дисциплинах.

В современной теоретической электротехнике различают четыре основные задачи: анализ, синтез, диакоптику и диагностику.

Задача анализа сводится к расчету токов, напряжений для заданной электрической цепи. Синтез представляет собой обратную задачу – нахождение такой электрической цепи, процессы в которой будут протекать по заданному закону. Задача диакоптики связана с исследованием электрических цепей по частям. И, наконец, задача диагностики сводится к определению параметров реально существующих цепей по экспериментальным данным при сохранении цело-

стности объектов диагностирования в процессе проведения экспериментов.

Далее подробно рассматривается задача анализа, тогда как о задачах синтеза, диакоптики и диагностики даются лишь общие понятия.

В курсе ТОЭ можно выделить три основных раздела: теорию линейных электрических цепей, теорию нелинейных электрических цепей, теорию электромагнитного поля.

В первом разделе – «Теория линейных электрических цепей» излагаются законы и свойства линейных электрических цепей, методы расчета установившихся и переходных процессов в таких цепях, особенности расчета цепей при синусоидальных и несинусоидальных гармонических воздействиях.

Во втором разделе – «Теория нелинейных электрических цепей» излагаются свойства нелинейных электрических и магнитных цепей и методы расчета происходящих в них процессов. Эти вопросы имеют большое значение в связи с широким использованием нелинейных цепей в современных технических устройствах.

Последний раздел – «Теория электромагнитного поля» – посвящен изучению расчета электромагнитного поля. Это связано с тем, что многие электротехнические задачи могут быть детально проанализированы только при помощи теории электромагнитного поля.

В пособии представлен материал части первого раздела курса «Теоретические основы электротехники» который охватывает следующие темы: законы электротехники, методы расчета электрических цепей, комплексный метод расчета цепей при синусоидальных воздействиях, резонансные явления в электрических цепях, электрические цепи со взаимной индукцией, методы расчета трехфазных цепей, расчет цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Определения

Электрическая цепь – совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, электрическом токе и электрическом напряжении (ГОСТ Р52002-2003).

Схема электрической цепи – графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов, показывающее соединения этих элементов (ГОСТ Р52002-2003).

Схему составляют из идеализированных элементов, которые позволяют осуществлять математическое моделирование физических явлений, происходящих в реальной электрической цепи.

Ветвь – участок электрической цепи, по которому протекает один и тот же ток (ГОСТ Р52002-2003).

Узел – место соединения ветвей электрической цепи (ГОСТ Р52002-2003).

Контур – любой замкнутый путь, образованный ветвями и узлами.

Независимый контур – контур, отличающийся от предыдущих хотя бы одной ветвью.

Различают линейные и нелинейные электрические цепи.

Линейная электрическая цепь – это такая электрическая цепь, у которой электрические напряжения и электрические токи или (и) электрические токи и магнитные потокосцепления, или (и) электрические заряды и электрические напряжения связаны друг с другом линейными зависимостями (ГОСТ Р52002-2003).

Нелинейная электрическая цепь – это такая цепь, у которой электрические напряжения и электрические токи или (и) электрические токи и магнитные потокосцепления, или (и) электрические заряды и электрические напряжения связаны друг с другом нелинейными зависимостями (ГОСТ Р52002-2003).

Далее, если не оговорено особо, рассматриваются линейные электрические цепи.

1.2. Источники электрической энергии

Любой источник электрической энергии можно представить в виде источника электродвижущей силы (ЭДС) либо в виде источника тока.

Идеальный источник ЭДС – это такой источник электрической энергии, электрическое напряжение на выводах которого не зависит от электрического тока в нем (ГОСТ Р52002-2003) (рис. 1.1).

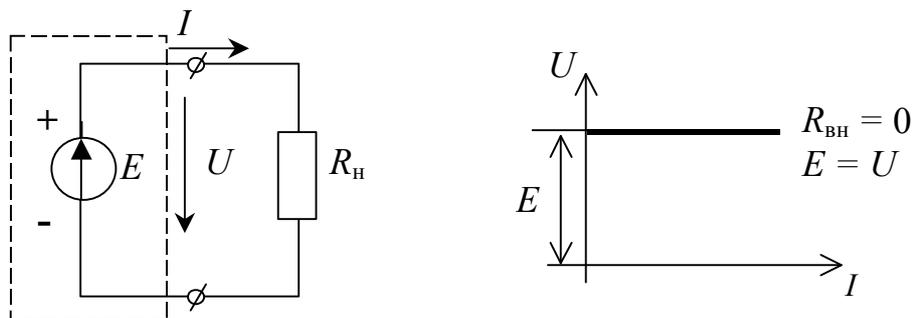


Рис. 1.1

Идеальный источник тока – это такой источник, электрическая энергия, электрический ток которого не зависит от напряжения на его выводах (ГОСТ Р52002-2003) (рис. 1.2).

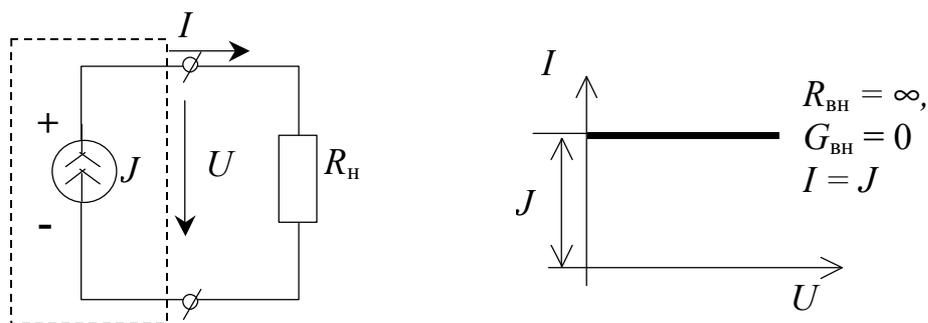


Рис. 1.2

При анализе электрических цепей любой источник электрической энергии может быть заменен как идеальным, так и реальным источником.

Реальный источник ЭДС представляет собой идеальный источник ЭДС с последовательно включенным сопротивлением $R_{\text{вн}}$, равным внутреннему сопротивлению реального источника ЭДС (рис. 1.3).

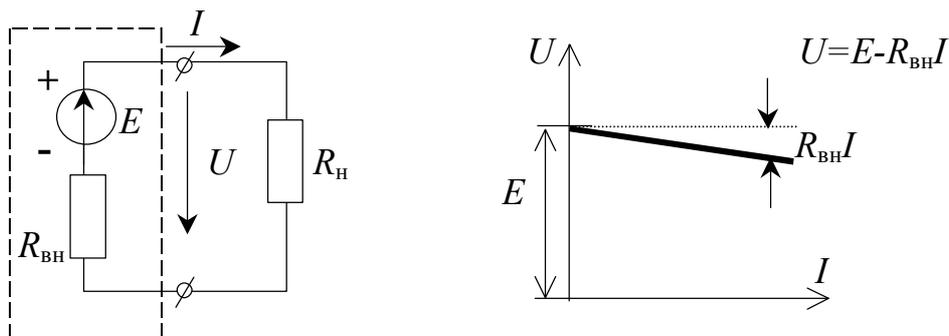


Рис. 1.3

Реальный источник тока может быть представлен идеальным источником тока с параллельно включенной внутренней проводимостью реального источника тока (рис. 1.4).

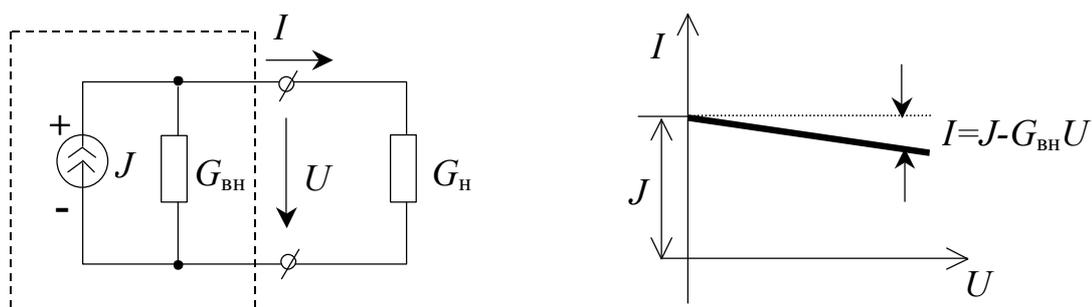


Рис. 1.4

В зависимости от соотношения внутреннего сопротивления и сопротивления внешней цепи реальный источник электрической энергии можно представить как в виде источника ЭДС, так и источника тока. Так, например, аккумулятор с $R_{\text{вн}} = 4$ Ом можно представить в виде источника тока, если он подключен к электрической цепи с эквивалентным входным сопротивлением, равным сотым долям Ома, и в виде источника ЭДС, когда сопротивление цепи достигает сотен Ом.

В зависимости от выбранного метода расчета источник электрической энергии может быть представлен в виде реального источника ЭДС или в виде источника тока.

Преобразование реального источника ЭДС в реальный источник тока показано на рис. 1.5.

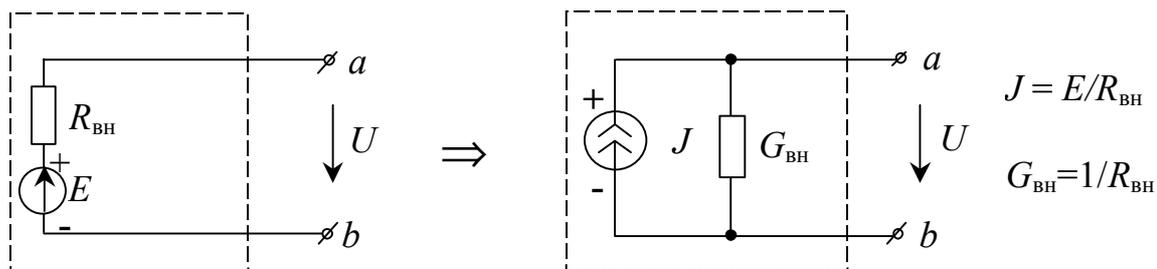


Рис. 1.5

Преобразование реального источника тока в реальный источник ЭДС показано на рис. 1.6.

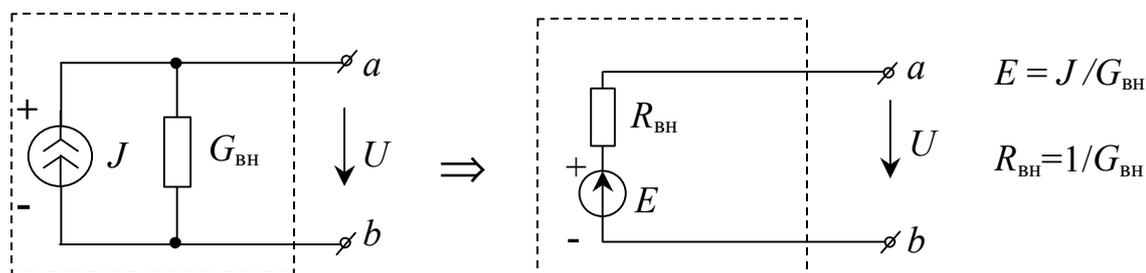


Рис. 1.6

Способ переноса источника тока иллюстрируется на рис. 1.7.

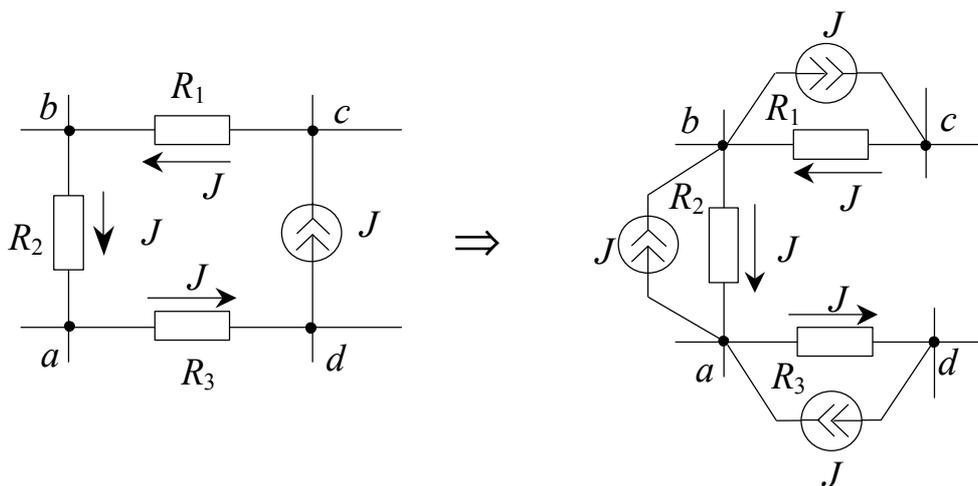


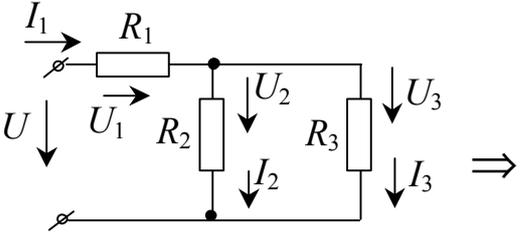
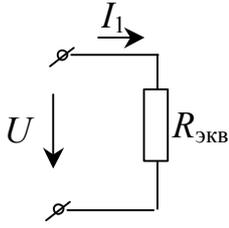
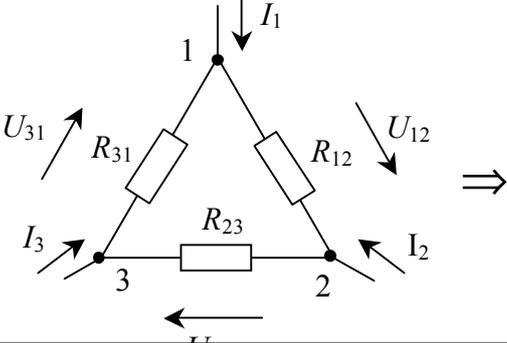
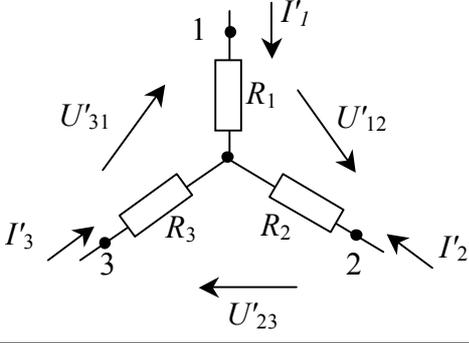
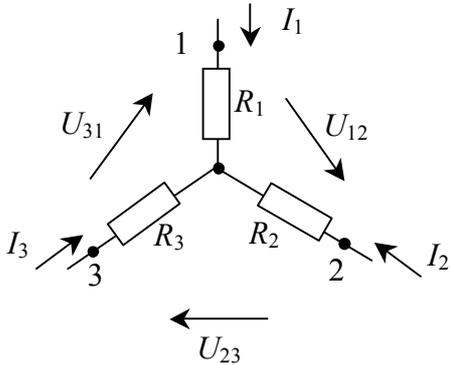
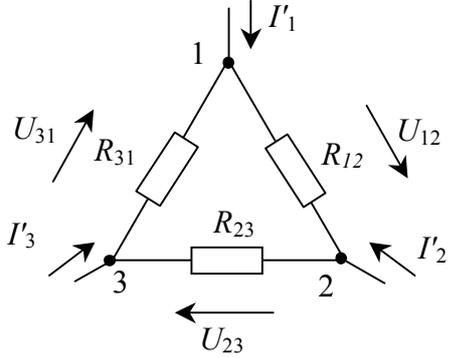
Рис. 1.7

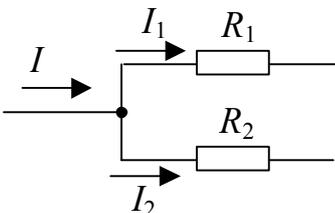
1.3. Основные преобразования схем, используемые при анализе электрических цепей

Основные преобразования электрических схем сведены в таблицу, в которой приведены виды соединений и их эквивалентные схемы замещения.

Таблица

Вид соединения	Эквивалентное преобразование
1	2
Последовательное соединение	
	$R_{\text{эКВ}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n,$ $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$
Параллельное соединение трех и более резисторов	
	$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n;$ $\frac{1}{R_{\text{эКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n};$ $G_{\text{эКВ}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n;$ $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n,$ <p style="text-align: center;">при $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_n$</p> $R_{\text{эКВ}} = R_1 / n$
Параллельное соединение двух резисторов	
	$\frac{1}{R_{\text{эКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$ $R_{\text{эКВ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$ $I = I_1 + I_2;$ $U = U_1 = U_2$

1	2
Смешанное соединение резисторов	
 $U = U_1 + U_2 \text{ или } U = U_1 + U_3;$ $U_2 = U_3;$ $I_1 = I_2 + I_3$	 $R_{\text{экв}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$
Эквивалентное преобразование соединения треугольником в соединение звездой	
	
Условия эквивалентного преобразования	
$I_1 = I'_1; \quad I_2 = I'_2; \quad I_3 = I'_3; \quad U_{12} = U'_{12}; \quad U_{23} = U'_{23}; \quad U_{31} = U'_{31}.$ $R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$	
Эквивалентное преобразование соединения звездой в соединение треугольником	
	

Условия эквивалентного преобразования	
$I_1 = I'_1; \quad I_2 = I'_2; \quad I_3 = I'_3, \quad U_{12} = U'_{12}; \quad U_{23} = U'_{23}; \quad U_{31} = U'_{31}.$	
$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3},$	
где	$G_1 = \frac{1}{R_1}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2}; \quad G_3 = \frac{1}{R_3};$
	$G_{12} = \frac{1}{R_{12}}; \quad G_{23} = \frac{1}{R_{23}}; \quad G_{31} = \frac{1}{R_{31}}.$
Формулы разброса	
	$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2};$ $I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$

1.4. Законы электрических цепей

Закон Ома для участка цепи используется для ветвей, не содержащих источников электрической энергии (рис. 1.8)

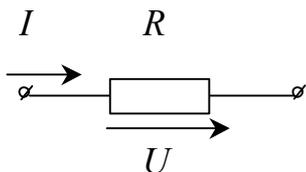


Рис. 1.8

$$I = \frac{\pm U}{R}.$$

Обобщенный закон Ома используется в тех случаях, когда в ветви присутствует источник электрической энергии (рис. 1.9).

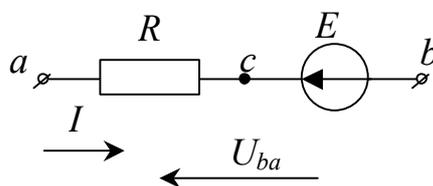


Рис. 1.9

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \varphi_c - E \\ \varphi_a &= \varphi_c + IR \\ \hline \varphi_b - \varphi_a &= -E - IR; \\ I &= \frac{-(\varphi_b - \varphi_a) - E}{R}; \\ I &= \frac{-U_{ba} - E}{R} \text{ или } I = \frac{U_{ab} - E}{R}; \\ I &= \frac{\pm U_{ab} \pm E}{R}. \end{aligned}$$

Правило знаков: если направление E совпадает с направлением тока, то выбирается знак «+», если не совпадает, то знак «-». Аналогичные рассуждения справедливы и для напряжения U .

Первый закон Кирхгофа записывается для узлов электрической цепи

$$\sum I_k = 0.$$

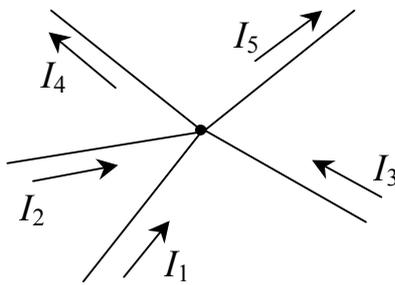


Рис. 1.10

Алгебраическая сумма токов в ветвях, подсоединенных к узлу, равна нулю.

Условимся: подтекающие к узлу токи записывать со знаком «+», а оттекающие – со знаком «-». Тогда выражение для токов по первому закону Кирхгофа для приведенной на рис. 1.10 части схемы можно записать в виде

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа вытекает из принципа непрерывности электрического тока – полный ток сквозь взятую в какой угодно среде замкнутую поверхность равен нулю. Физический смысл: линии тока не имеют ни начала, ни конца, они являются замкнутыми.

Второй закон Кирхгофа записывается для контуров электрической цепи

$$\sum U_k = 0.$$

Алгебраическая сумма напряжений вдоль контура равна нулю

или

$$\sum_{m=1}^l I_m R_m = \sum_{m=1}^l E_m.$$

Алгебраическая сумма падений напряжений в любом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в том же контуре.

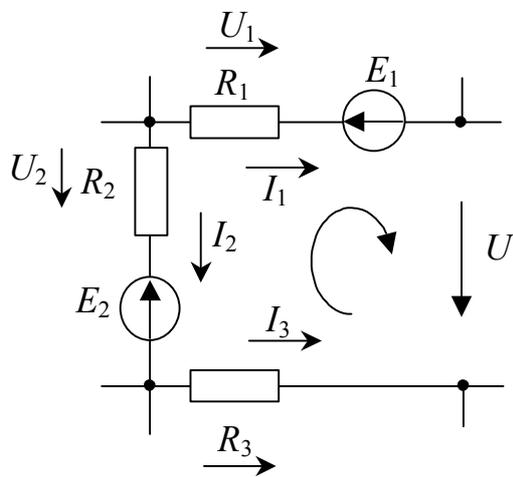


Рис. 1.11

Правило знаков: слагаемое входит со знаком «+», если направление падения напряжения или ЭДС совпадает с направлением обхода контура.

Уравнение для приведенной на рис. 1.11 схемы можно записать в виде

$$I_1 R_1 + U - I_3 R_3 - I_2 R_2 = E_2 - E_1.$$

1.5. Расчет электрической цепи по законам Кирхгофа

1.5.1. Алгоритм расчета

Алгоритм расчета электрической цепи по законам Кирхгофа комментируется на примере схемы, изображенной на рис. 1.12.

1. Произвольно выбираем условно положительное направление токов.

2. Определяем количество необходимых уравнений.

Пусть v – общее число ветвей, v_J – число ветвей с источниками тока, y – число узлов, тогда $v - v_J$ – число искоемых токов;

$n_I = (y - 1)$ – число уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, $n_{II} = (v - v_J) - (y - 1)$

– число уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа.

Например, для схемы, изображенной на рис. 1.12 при $v = 4$, $v_J = 1$, $y = 2$, количество уравнений

$n_I = 1$ и $n_{II} = 2$.

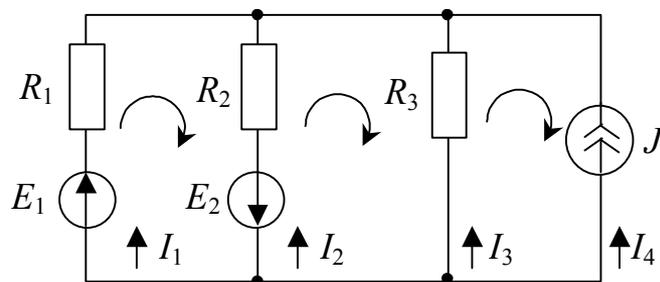


Рис. 1.12

3. Выбираем независимые контуры, количество которых равно найденному количеству уравнений по второму закону Кирхгофа. Задаем положительное направление их обхода.

4. По первому и второму законам Кирхгофа с учетом правил выбора знаков составляем систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0; \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2; \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 = -E_2; \\ I_4 = J. \end{cases}$$

5. Определяем неизвестные токи, решая совместно уравнения.

6. В случае необходимости проводим анализ полученного результата: если какой-либо ток получен с отрицательным знаком, то его действительное положительное направление противоположно условно положительному, выбранному вначале.

1.5.2. Потенциальная диаграмма

Под потенциальной диаграммой понимают график распределения потенциала вдоль замкнутого контура. На рис. 1.13 показана потенциальная диаграмма контура $abcda$ для случая, когда потенциал точки a принят равным нулю.

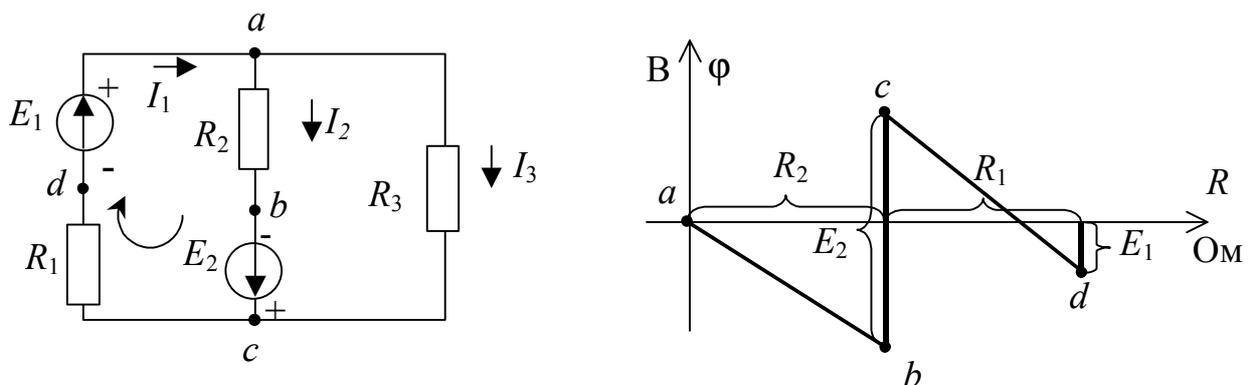


Рис. 1.13

При построении потенциальной диаграммы потенциал, равный нулю, может быть присвоен любому одному узлу.

Потенциальная диаграмма – графическое отображение второго закона Кирхгофа.

1.6. Метод контурных токов

Вообразим, что в трех независимых контурах приведенной на рис. 1.14 электрической цепи имеются токи, замыкающиеся только в этих контурах – контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} . Тогда в ветвях цепи должны быть справедливыми следующие соотношения между контурными и реальными токами:

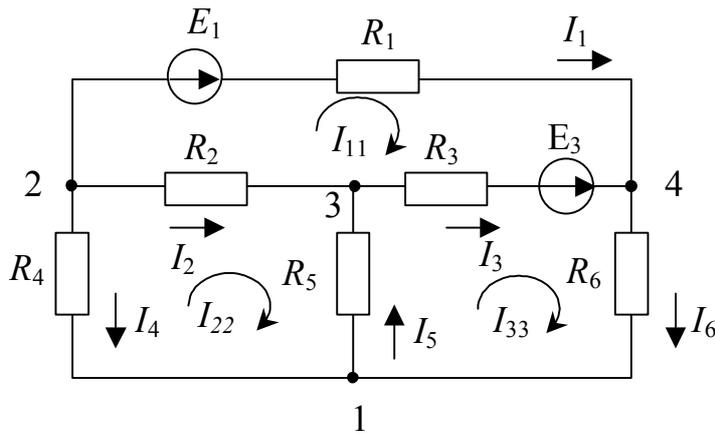


Рис. 1.14

должны быть справедливыми следующие соотношения между контурными и реальными токами:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}, \\ I_2 &= I_{22} - I_{11}, \\ I_3 &= I_{33} - I_{11}, \\ I_4 &= -I_{22}, \\ I_5 &= I_{33} - I_{22}, \\ I_6 &= I_{33}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для первого контура, считая направление обхода контура совпадающим с направлением контурного тока I_{11} :

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_2 R_2 = E_1 - E_3.$$

Заменим реальные токи I_1 , I_2 , I_3 на контурные, как это сделано в (1.1), тогда

$$I_{11} R_1 - I_{33} R_3 + I_{11} R_3 - I_{22} R_2 + I_{11} R_2 = E_1 - E_3.$$

Сгруппируем. В полученном выражении при токе I_{11} будет записана сумма сопротивлений, входящих в первый контур – собственное сопротивление контура, а при токах I_{22} и I_{33} – взаимные сопротивления между первым и соответственно вторым и третьим контурами. Аналогично, для второго и третьего контуров можно записать два других уравнения. Получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_3) - I_{22}R_2 - I_{33}R_3 = E_1 - E_3; \\ -I_{11}R_2 + I_{22}(R_2 + R_4 + R_5) - I_{33}R_5 = 0; \\ -I_{11}R_3 - I_{22}R_5 + I_{33}(R_3 + R_5 + R_6) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Из системы уравнений (1.2) находят контурные токи, по которым определяют в соответствии с (1.1) реальные токи.

Общее выражение для случая n -го количества независимых контуров можно записать

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + \mathbf{K} + I_{nn}R_{1n} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + \mathbf{K} + I_{nn}R_{2n} = E_{22} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + \mathbf{K} + I_{nn}R_{nn} = E_{nn}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где R_{11}, R_{22}, R_{nn} – собственные сопротивления соответственно первого, второго и n -го контуров, равные сумме всех сопротивлений, входящих в рассматриваемый контур; $R_{12}, R_{23}, \dots, R_{km}$ – взаимное сопротивление между соответственно первым и вторым, вторым и третьим, k -м и m -м контурами; $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ – контурная ЭДС n -го контура, равная алгебраической сумме ЭДС, входящих в рассматриваемый контур.

1.6.1. Алгоритм расчета

1. Определяем количество независимых контуров, используя выражение для нахождения количества уравнений по второму закону Кирхгофа: $n_{\Pi} = (v - v_j) - (y - 1)$.

2. В соответствии с расчетным количеством уравнений составляем систему уравнений в общем виде по типу (1.3).

3. Выбираем независимые контуры, задаемся в них условно положительными направлениями контурных токов.

4. Определяем собственные и взаимные сопротивления, контурные ЭДС. Собственным сопротивлениям R_{nn} всегда присваивается знак «+», тогда как взаимные сопротивления R_{km} войдут в систему уравнений со знаком «+» или «-» в зависимости от того, совпадает ли направление контурного тока рассматриваемого контура с направлением другого контурного тока в ветви с взаимным сопротивлением. В случае совпадения взаимному сопротивлению присваиваем знак «+».

На практике рекомендуется использовать следующее правило: *если контурные токи выбраны в одном и том же направлении, например, по часовой стрелке, то собственным сопротивлениям контуров присваивается знак «+», тогда как все взаимные сопротивления войдут в систему уравнений со знаком «-».*

5. Решаем полученную систему относительно контурных токов.

6. Задавшись произвольно условно положительным направлением токов, находим их по рассчитанным контурным токам.

7. В случае необходимости проводим анализ полученного результата.

1.6.2. Особенности формирования уравнений по методу контурных токов для электрических цепей с источниками тока

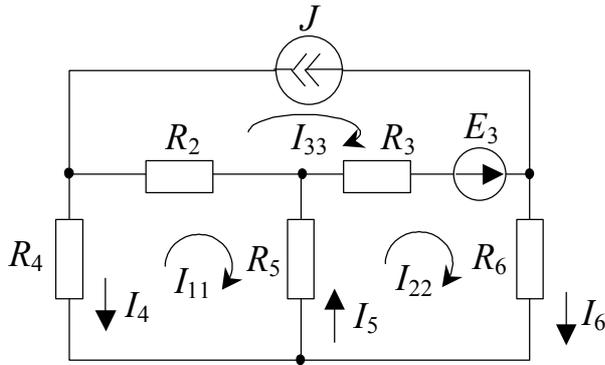


Рис. 1.15

Запись уравнений по методу контурных токов в цепях с источниками тока может быть осуществлена из условия, что один из контурных токов известен и равен току источника тока (рис. 1.15).

$$\begin{cases} I_{11}(R_2 + R_4 + R_5) - I_{22}R_5 - I_{33}R_2 = 0; \\ -I_{11}R_5 + I_{22}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{33}R_3 = E_3; \\ I_{33} = -J. \end{cases} \quad (1.4)$$

Другой способ формирования уравнений заключается в том, что можно составить уравнения после эквивалентного преобразования источника тока в источник ЭДС, как показано на рис. 1.16.

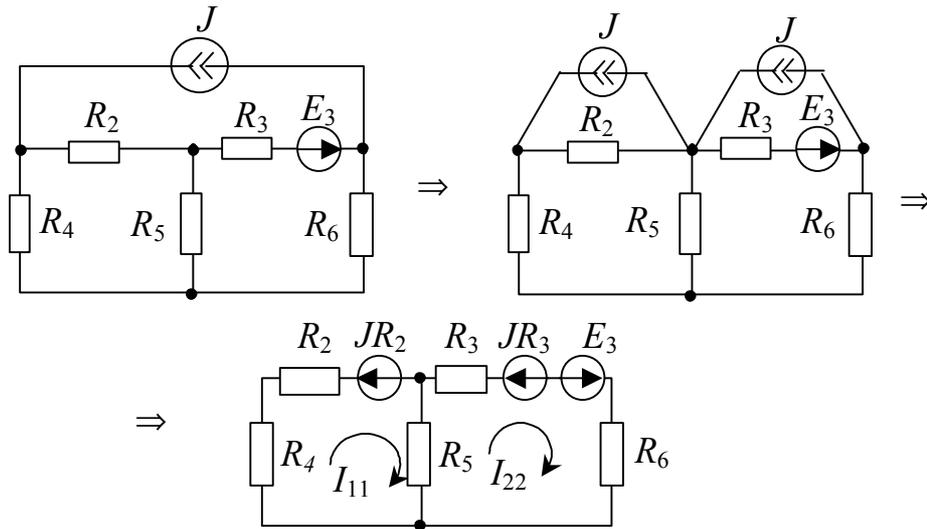


Рис. 1.16

$$\begin{cases} I_{11}(R_2 + R_4 + R_5) - I_{22}R_5 = -JR_2; \\ -I_{11}R_5 + I_{22}(R_5 + R_3 + R_6) = -JR_3 + E_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Системы уравнений (1.4) и (1.5) тождественны, следовательно, оба приведенных подхода к составлению уравнений по методу контурных токов для электрических цепей с источниками тока могут быть использованы на практике.

1.7. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов основан на реализации первого закона Кирхгофа. Количество уравнений, необходимых для отыскания потенциалов узлов электрической цепи, соответствует количеству уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа $n_I = y - 1$.

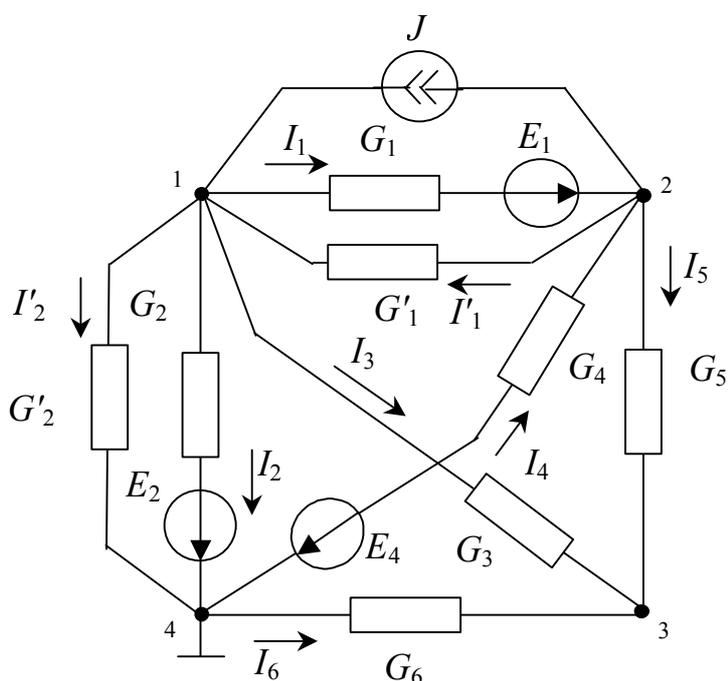


Рис. 1.17

Рассмотрим принцип формирования одного из уравнений системы уравнений по методу узловых потенциалов на примере схемы, изображенной на рис. 1.17.

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для первого узла

$$J + I'_1 - I_1 - I_2 - I'_2 - I_3 = 0.$$

Используя обобщенный закон Ома

$$I = \frac{\pm E \pm U}{R} = (\pm E \pm U)G,$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$J + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]G'_1 - [E + (\varphi_1 - \varphi_2)]G_1 - [E_2 + (\varphi_1 - \varphi_4)]G_2 - \\ - [0 + (\varphi_1 - \varphi_4)]G'_2 - [0 + (\varphi_1 - \varphi_3)]G_3 = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$\varphi_1 (G_1 + G'_1 + G_2 + G'_2 + G_3) - \varphi_2 (G_1 + G'_1) - \varphi_3 G_3 = J - E_1 G_1 - E_2 G_2.$$

Подобные уравнения могут быть записаны и для остальных узлов схемы.

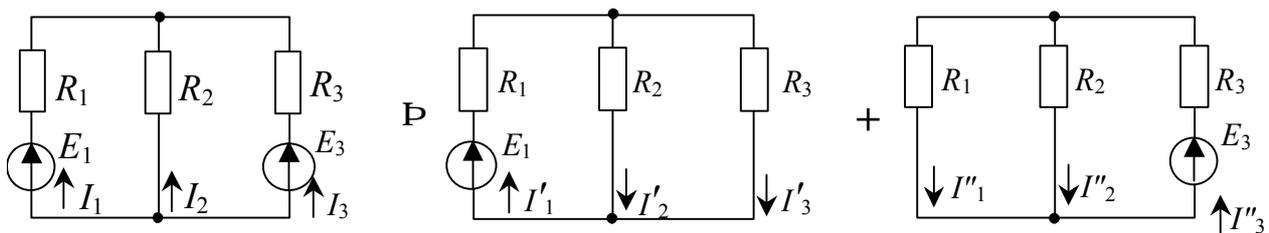
где Δ - главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \mathbf{K} & R_{1k} & \mathbf{K} & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \mathbf{K} & R_{2k} & \mathbf{K} & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & & R_{nk} & & R_{nn} \end{vmatrix},$$

Δ_{km} – алгебраическое дополнение, полученное из главного определителя Δ путем вычеркивания k -го столбца и m -й строки и умножением полученного результата на $(-1)^{k+m}$.

Выражение (1.7) раскрывает суть принципа наложения – ток в k -й ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждым из источников в отдельности.

Принцип наложения реализуется в методе расчета электрических цепей, получившем название метода наложения. Реализацию метода наложения рассмотрим на примере расчета простой схемы. Пусть требуется рассчитать все токи в электрической цепи, схема которой представлена на рис. 1.19. Для этого исходную электрическую схему представим в виде суммы двух так называемых частичных схем, как это показано на рис. 1.19.



$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}, \quad I''_3 = \frac{E}{R_3 + \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1}},$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I''_1 = I''_3 \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}, \quad I''_2 = I''_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

$$I_1 = I'_1 - I''_1, \quad I_2 = -I'_2 - I''_2, \quad I_3 = -I'_3 + I''_3.$$

Рис. 1.19

Искомый ток можно найти в виде алгебраической суммы частичных токов. Так, например, если направление I_1' совпадает с направлением I_1 , то току I_1' присваивается знак «+», тогда как току I_1'' присваивается знак «-». Следовательно, $I_1 = I_1' - I_1''$, $I_2 = -I_2' - I_2''$, $I_3 = -I_3' + I_3''$.

При составлении частичных схем оставляют один источник электрической энергии, другие же удаляют, при этом участки ветвей с источниками ЭДС закорачивают, а ветви с источниками тока разрывают.

Область применения. Метод наложения применим при расчете линейных цепей, но он не применим при расчете нелинейных электрических цепей. Им нельзя также пользоваться при расчете квадратных величин, таких, как, например, мощность.

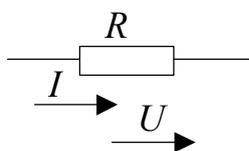


Рис. 1.20

Пусть, например, требуется рассчитать рассеиваемую мощность на резисторе R (рис. 1.20) $P = UI$, $U = IR$, $P = I^2 R$.

Если $I = I' + I''$,

то $P_a = (I' + I'')^2 R = [(I')^2 + 2I' I'' + (I'')^2] R$,

или $P_b = P_1 + P_2 = [(I')^2 R + (I'')^2 R]$.

При этом $P_a \neq P_b$.

Достоинство метода: использование простейших соотношений электротехники: закона Ома, формул определения эквивалентного сопротивления при последовательном, параллельном и смешанном соединениях, формул разброса, формул эквивалентного преобразования соединения звездой в треугольник и обратно.

1.9. Метод эквивалентного генератора

1.9.1. Активный и пассивный двухполюсники

Часть электрической цепи, имеющую более двух выделенных зажимов, называют многополюсником (ГОСТ Р 52002-2003).

Двухполюсник – это часть электрической цепи с двумя выделенными выводами (ГОСТ Р 52002-2003).

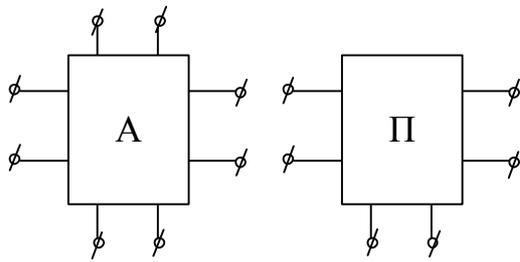


Рис. 1.21

Графическое изображение активного и пассивного восьми-полюсника и шестиполюсника показано на рис.1.21, а двухполюсника – на рис. 1.22.

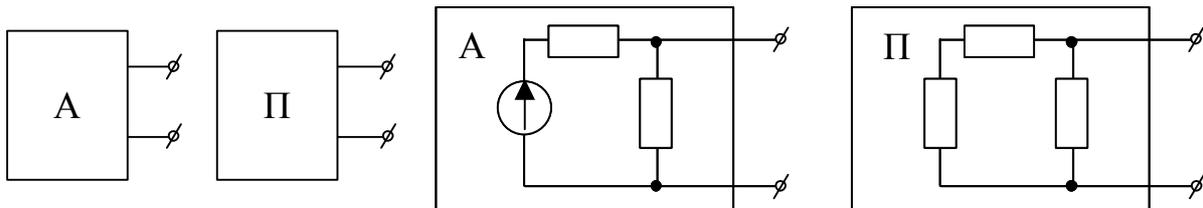


Рис. 1.22

Электрическая цепь (участок электрической цепи, двухполюсник), содержащая источник электрической энергии, называется активной электрической цепью.

Электрическая цепь (участок электрической цепи, двухполюсник), не содержащая источник электрической энергии, называется пассивной электрической цепью (ГОСТ Р52002-2003).

1.9.2. Теорема об эквивалентном генераторе

Любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода активного двухполюсника, а внутреннее сопротивление – входному сопротивлению соответствующего пассивного двухполюсника.

Графическое представление теоремы об эквивалентном генераторе приведено на рис. 1.23.

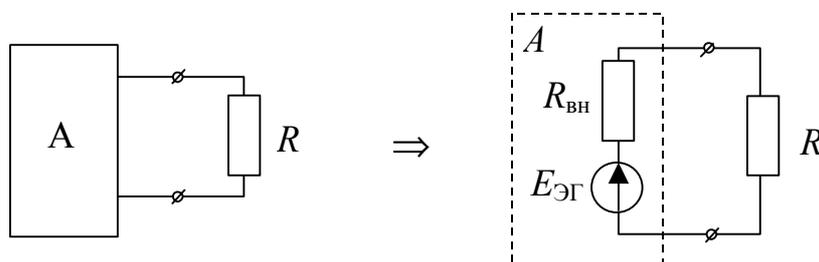


Рис. 1.23

Доказательство теоремы осуществим с помощью метода наложения.

Пусть имеется активный двухполюсник, к зажимам которого подключен резистор с сопротивлением R (исходная схема на рис. 1.23).

Ток I не изменится, если в ветвь km включить две равные и противоположно направленные ЭДС E_1 и E_2 (рис. 1.24).

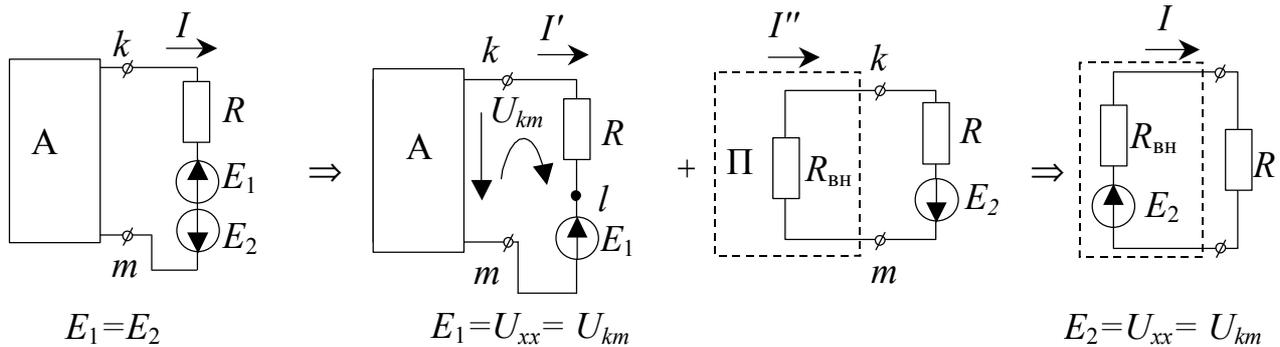


Рис. 1.24

На основании принципа наложения ток можно определить в виде суммы двух токов I' и I'' $I = I' + I''$.

Под током I' будем понимать ток, вызванный ЭДС E_1 и всеми источниками активного двухполюсника. Для первой частичной схемы, для контура $klmk$, уравнение по второму закону Кирхгофа можно записать в виде

$$I'R - U_{km} = -E_1,$$

откуда

$$I' = \frac{U_{km} - E_1}{R},$$

если при этом E_1 выбрать таким, чтобы $E_1 = U_{km}$, то $I' = 0$.

В случае $I' = 0$ суммарный ток определяется вторым частичным током I'' . Ток I'' вызывается только источником E_2 , который можно ввести в состав двухполюсника. Тогда

$$I = I'' = \frac{E_2}{R_{вн} + R}.$$

Полученное выражение соответствует последней схеме на рис.1.24, которая идентична правой схеме рис. 1.23, следовательно, теорема доказана.

1.9.3. Алгоритм аналитического расчета тока по методу эквивалентного генератора

1. Определяем напряжение холостого хода, т.е. напряжение на разомкнутых зажимах. При этом используется любой из известных методов расчета: метод контурных токов, метод узловых потенциалов и т.д.

2. Определяем внутреннее сопротивление пассивного двухполюсника. Участки ветвей с источниками ЭДС закорачиваем, а ветви с источниками тока размыкаем.

3. Рассчитываем искомый ток по формуле

$$I = \frac{E_{\text{ЭГ}}}{R_{\text{вн}} + R}. \quad (1.8)$$

Пример. Рассчитать ток I в диагонали моста, схема которого представлена на рис. 1.25.

Решение.

1. Определим напряжение холостого хода U_{xx} на разомкнутых зажимах диагонали моста. Для этого составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $cbac$ схемы, изображенной на рис. 1.26.

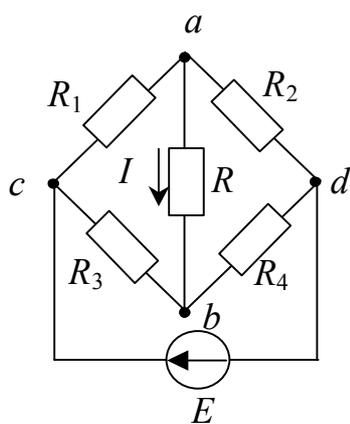


Рис. 1.25

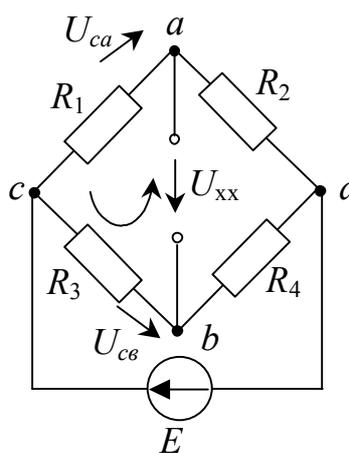


Рис. 1.26

$$U_{cb} - U_{\text{xx}} - U_{ca} = 0,$$

$$U_{\text{xx}} = U_{cb} - U_{ca},$$

$$U_{\text{xx}} = \frac{E}{R_3 + R_4} R_3 - \frac{E}{R_1 + R_2} R_1 = E \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

2. Определим внутреннее сопротивление (рис. 1.27), устранив источник электрической энергии в исходной схеме

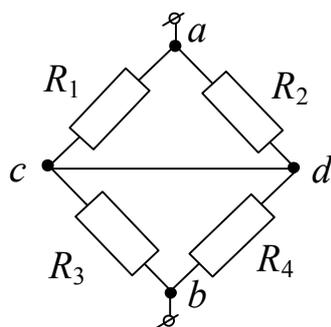


Рис. 1.27

$$R_{\text{вн}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

3. Определим ток в диагонали моста по формуле (1.8)

$$I = \frac{E \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

1.9.4. Алгоритм экспериментального определения тока по методу эквивалентного генератора

Опыты холостого хода и короткого замыкания

1. Определяем ЭДС эквивалентного генератора. Для определения ЭДС проводим опыт холостого хода. Напряжение на зажимах активного двухполюсника в режиме его холостого хода U_{xx} равно ЭДС эквивалентного генератора.

2. Замеряем ток короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ в режиме, когда зажимы активного двухполюсника замкнуты накоротко, как это показано на рис. 1.28. Определяем внутреннее сопротивление

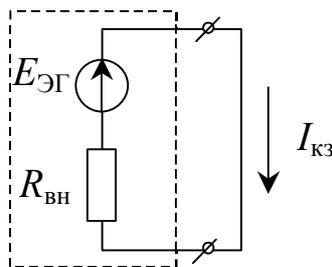


Рис. 1.28

$$R_{\text{вн}} = \frac{E_{\text{ЭГ}}}{I_{\text{кз}}} = \frac{U_{\text{xx}}}{I_{\text{кз}}}.$$

3. Рассчитываем искомый ток в ветви с сопротивлением $I = \frac{U_{\text{xx}}}{R_{\text{вн}} + R}.$

Область применения. Метод эквивалентного генератора используется при определении одного или ограниченного числа токов, а также при построении нагрузочной характеристики $I = f(R)$ электрической цепи.

1.10. Передача энергии от активного двухполюсника нагрузке

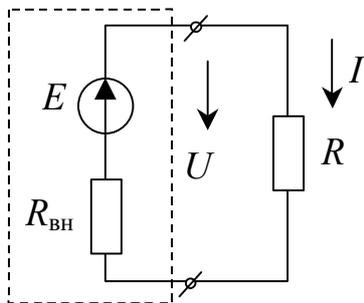


Рис. 1.29

Пусть имеется активный двухполюсник, к выводам которого подключена нагрузка R , как это показано на рис. 1.29. Тогда ток в нагрузке можно определить по закону Ома $I = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R}$.

Активная мощность, рассеиваемая на нагрузке, $P = I^2 R = \frac{E^2}{(R_{\text{вн}} + R)^2} R$.

Для того, чтобы выяснить, каково должно быть соотношение между $R_{\text{вн}}$ и сопротивлением нагрузки R при условии выделения максимальной мощности, найдем первую производную P по R и приравняем ее к нулю

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R + R_{\text{вн}})^2 - 2R(R + R_{\text{вн}})}{(R + R_{\text{вн}})^4} = 0,$$

откуда $R = R_{\text{вн}}$. Если найти вторую производную, то можно убедиться, что она отрицательна, поэтому условие $R = R_{\text{вн}}$ соответствует максимуму функции $P=f(R)$. Учитывая условие $R = R_{\text{вн}}$, можно найти максимальную мощность, которая может быть выделена в нагрузке R

$$P_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4R}.$$

Полезная активная мощность, которая выделяется в нагрузке, рассчитывается по записанному выше выражению:

$$P_{\text{полезная}} = I^2 R = \frac{E^2}{(R_{\text{вн}} + R)^2} R,$$

а затраченная мощность

$$P_E = EI = E \frac{E}{R_{\text{вн}} + R} = \frac{E^2}{R_{\text{вн}} + R}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_{\text{полезная}}}{P_E} = \frac{\cancel{E^2}}{(R_{\text{вн}} + R)^2} R \frac{(R_{\text{вн}} + R)}{\cancel{E^2}} = \frac{R}{R_{\text{вн}} + R}.$$

Используя условие выделения максимальной мощности $R=R_{\text{вн}}$, получим

$$\eta = R/2R = 0,5 .$$

Выбор величины сопротивления нагрузки R , равного $R_{\text{вн}}$ активного двухполюсника, называют согласованием нагрузки.

1.11. Метод пропорциональных величин

Метод пропорциональных величин применим для расчета цепей, состоящих из последовательно и параллельно соединенных резисторов и одного источника электрической энергии, подключенного к входным зажимам.

Задаемся током, например 1 А, в наиболее удаленной ветви электрической схемы (рис. 1.30).

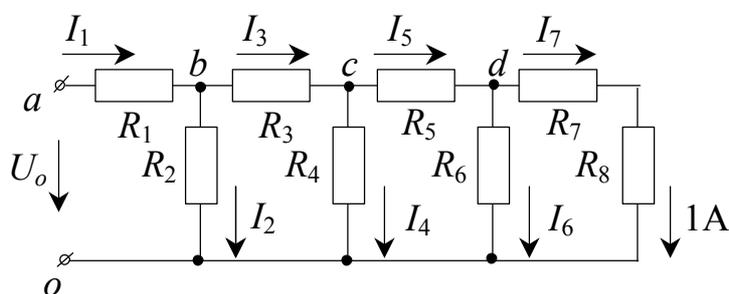


Рис. 1.30

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \text{ Ом}, \\ R_2 &= 11 \text{ Ом}, \\ R_3 &= 1 \text{ Ом}, \\ R_4 &= 8 \text{ Ом}, \\ R_5 &= 2 \text{ Ом}, \\ R_6 &= 4 \text{ Ом}, \\ R_7 &= 2 \text{ Ом}, \\ R_8 &= 2 \text{ Ом}, \\ U_o &= 100 \text{ В}. \end{aligned}$$

Далее, продвигаясь от конца схемы к ее началу, находим токи в ветвях и напряжения на различных её участках. Найденное значение напряжения на входе U_{ao} будет отличаться от заданного U_o в k раз:

$$k = U_o / U_{ao}.$$

Тогда реальные токи в ветвях и напряжения на участках схемы так же будут отличаться от найденных в k раз.

$$\begin{aligned} U_{do} &= I_7 (R_7 + R_8) = 1(2+2) = 4 \text{ В}, \\ I_6 &= U_{do} / R_6 = 4 / 4 = 1 \text{ А}, \\ I_5 &= I_6 + I_7 = 1 + 1 = 2 \text{ А}, \\ U_{co} &= I_5 R_5 + U_{do} = 2 \cdot 2 + 4 = 8 \text{ В}, \\ I_4 &= U_{co} / R_4 = 8 / 8 = 1 \text{ А}, \\ I_3 &= I_4 + I_5 = 1 + 2 = 3 \text{ А}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{bo} &= I_3 R_3 + U_{co} = 3 \cdot 1 + 8 = 11 \text{ В}, \\
 I_2 &= U_{bo} / R_2 = 11 / 11 = 1 \text{ А}, \\
 I_1 &= I_2 + I_3 = 1 + 3 = 4 \text{ А}, \\
 U_{ao} &= I_1 R_1 + U_{bo} = 4 \cdot 4 + 11 = 19 \text{ В}, \\
 k &= U_o / U_{ao} = 100 / 19,
 \end{aligned}$$

тогда, например, ток I_5 при входном напряжении 100 В будет равен

$$I_{5(100)} = k \cdot I_5 = \frac{100}{19} 2 = \frac{200}{19} \text{ А} .$$

Метод пропорциональных величин применим только для линейных электрических цепей.

1.12. Теорема о линейных соотношениях

Если в линейной электрической цепи изменяется ЭДС или сопротивление в какой-либо одной ветви, то две любые величины (токи, напряжения) двух любых ветвей связаны друг с другом линейной зависимостью вида

$$y = a + bx, \quad (1.9)$$

где x – ток или напряжение одной ветви, а y – ток или напряжение другой ветви. Рассмотрим реализацию теоремы о линейных соотношениях на примере.

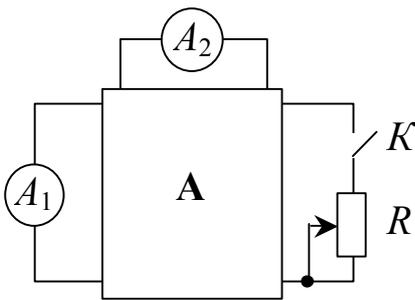


Рис. 1.31

Пример. Определить показание амперметра A_1 при некотором сопротивлении переменного резистора R (рис. 1.31), если при этом амперметр A_2 показывает 4,5 А.

Решение.

Проведем эксперимент: зарегистрируем показание амперметров при разомкнутом и замкнутом ключе K . Значение сопротивления R может быть любым.

Пусть $I_1 = 1 \text{ А}$, $I_2 = 5 \text{ А}$ - при разомкнутом ключе K , $I_1 = 2 \text{ А}$, $I_2 = 4 \text{ А}$ - при замкнутом ключе.

Определим коэффициенты a и b в выражении (1.9). Для этого запишем его через токи I_1 и I_2

$$I_1 = a + bI_2$$

и, используя результаты эксперимента, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = a + 5b; \\ 2 = a + 4b, \end{cases}$$

откуда $a = 6$, $b = -1$. Тогда линейная зависимость $I_1 = 6 - I_2$ дает возможность рассчитать ток I_1 при любом, в том числе и указанном токе $I_2 = 4,5$ А. В данном случае $I_1 = 1,5$ А.

Если в схеме изменяются одновременно ЭДС или сопротивления в каких-либо двух ветвях, то любые три величины в этой схеме (токи, напряжения) связаны с другим линейным соотношением вида

$$y = a + bx = cz,$$

где y, x, z - напряжения или токи различных ветвей.

1.13. Теорема компенсации

В любой электрической схеме сопротивление можно заменить ЭДС, численно равной падению напряжения на замененном элементе и направленной встречно току в этом сопротивлении. При этом токи в исходной и преобразованной схеме остаются неизменными.

Доказательство теоремы может быть осуществлено на основе логических рассуждений, которые иллюстрируются приведенным ниже рис.1.32 и соответствующими выкладками.

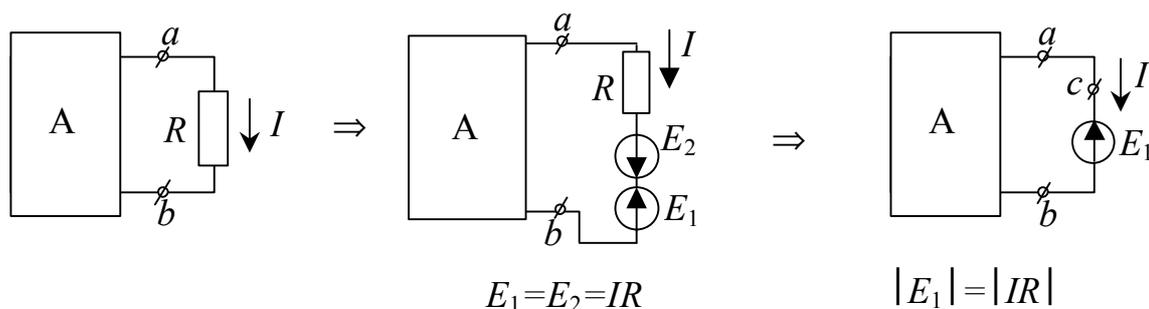


Рис. 1.32

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) + E_2 - E_1}{R},$$

$$IR = (\varphi_a - \varphi_c) + E_2 - E_1,$$

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E_2 = \varphi_a,$$

так как $E_2 = IR$, точки a и c можно объединить, тогда $|E_1|$ Ошибка! Ошибка связи. $= |IR|$ Ошибка! Ошибка связи., следовательно, сопротивление R можно за-

менить ЭДС, численно равной падению напряжения на R и направленной встречно току в этом сопротивлении.

1.14. Энергетический баланс в электрических цепях

На основании закона сохранения энергии *количество тепла, выделившееся в единицу времени в резисторах электрической цепи, должно равняться энергии, доставляемой источниками электрической энергии.*

Исходя из этого, можно записать выражение для мощности, отражающее энергетический баланс в электрических цепях:

$$\sum_{k=1}^n I_k^2 R_k = \sum_{k=1}^n E_k I_k + \sum_{j=1}^q U_j J_j.$$

Слагаемые левой части приведенного равенства всегда положительны и представляют собой мощность, которая выделяется на потребителях в виде джоулевого тепла. В правой части записывается мощность, которую развивают источники ЭДС и источники тока. Эти слагаемые могут иметь знак «+» или знак «-» в зависимости от того, совпадает ли направление тока с направлением ЭДС в ветви с источником ЭДС или совпадает ли направление тока источника тока с направлением напряжения на его зажимах. В случае совпадения соответствующему слагаемому присваивается знак «+» и наоборот. Отрицательный знак перед слагаемым в правой части означает, что источник электрической энергии работает в режиме потребителя, как, например, аккумулятор при его зарядке.

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1. Синусоидальный ток и основные характеризующие его величины

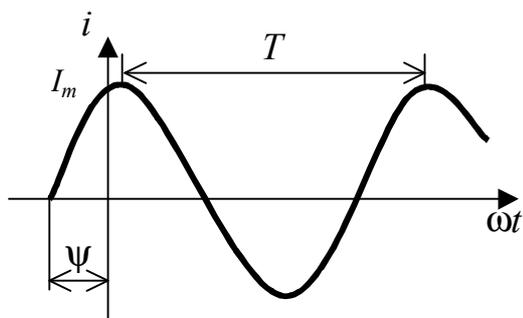


Рис. 2.1

Синусоидальный электрический ток – периодический электрический ток, являющийся синусоидальной функцией времени (ГОСТ Р52002-2003) (рис. 2.1)

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

где i – мгновенный электрический ток – значение электрического тока в рассматриваемый момент времени, [А] (ГОСТ Р52002-2003);

I_m – амплитуда синусоидального тока (U_m, E_m) – максимальное значение синусоидальной функции [А] ([В]);

$(\omega t + \psi)$ – фаза синусоидального электрического тока – аргумент синусоидального электрического тока, отсчитываемый от точки перехода значения тока через нуль к положительному значению [рад] (ГОСТ Р52002-2003);

ψ – начальная фаза синусоидального тока – значение фазы синусоидального тока в начальный момент времени, [рад] (ГОСТ Р52002-2003);

ω – угловая частота синусоидального электрического тока – скорость изменения фазы синусоидального электрического тока, равная частоте синусоидального тока, умноженной на 2π , $\omega = 2\pi f$, [рад/с] (ГОСТ Р52002-2003);

f – частота электрического тока – величина, обратная периоду электрического тока (ГОСТ Р52002-2003) $f=1/T$, [Гц];

T – период электрического тока – наименьший интервал времени, по истечении которого мгновенные значения периодического электрического тока повторяются в неизменной последовательности, [с] (ГОСТ Р52002-2003),

φ – разность фаз, сдвиг фаз – алгебраическая величина, определяемая вычитанием начальной фазы синусоидального электрического тока

из начальной фазы синусоидального электрического напряжения (ГОСТ Р52002-2003) (рис. 2.2).

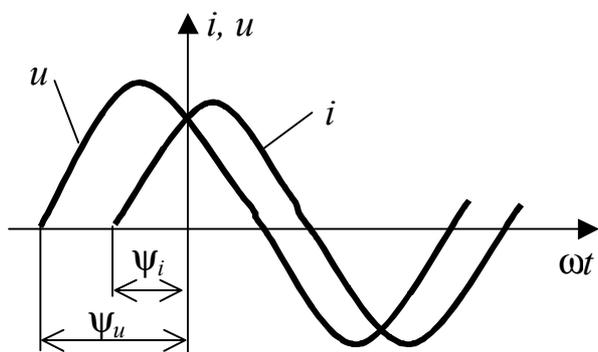


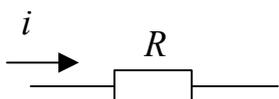
Рис. 2.2

$\varphi = \Psi_u - \Psi_i$,
 $\varphi = 0$ – в одной фазе,
 $\varphi = \pm\pi$ – в противофазе,
 $\varphi = \pm\pi/2$ – в квадратуре.
 Если $\varphi > 0$, то говорят, что напряжение опережает ток на угол, равный φ .

2.2. Действующее и среднее значения синусоидально изменяющейся величины

Действующее значение переменного тока численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток (рис. 2.3)

Синусоидальный ток



Постоянный ток

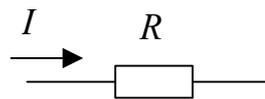


Рис. 2.3

$$p = i^2 R$$

$$A_{\sim} = \int_0^T i^2 R dt$$

$$P = I^2 R$$

$$A_{=} = I^2 R T$$

$$A_{\sim} = A_{=}.$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Действующий периодический ток – среднеквадратичное значение периодического электрического тока за период (ГОСТ Р52002-2003)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} =$$

$$= I_m \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)} = I_m \sqrt{\frac{1}{2T} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

Аналогично определяют действующие значения периодических электрического напряжения, электродвижущей силы

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Под средним значением некоторой функции понимают

$$f_{\text{cp}} = \frac{\int_0^{t_1} f(t) dt}{t_1}.$$

За полный период среднее значение синусоидально изменяющейся величины равно нулю

$$I_{\text{cp}_T} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = 0.$$

Поэтому среднее значение синусоидально изменяющегося тока рассчитывают за половину периода

$$I_{\text{cp}_{T/2}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{T\omega} (-\cos \omega t) \Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,638 I_m.$$

2.3. Коэффициент амплитуды и коэффициент формы

Коэффициент амплитуды синусоидального тока

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{I} = \sqrt{2}.$$

Коэффициент формы синусоидального тока

$$K_\phi = \frac{I}{I_{\text{cp}}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{\frac{2}{\pi} I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

2.4. Изображение синусоидальных токов, напряжений, ЭДС с помощью вращающихся векторов. Векторная диаграмма

Синусоидальные токи, напряжения, ЭДС, имеющие угловую частоту ω , можно изобразить векторами в соответствующем масштабе, вращающимися с угловой скоростью ω (рис. 2.4).

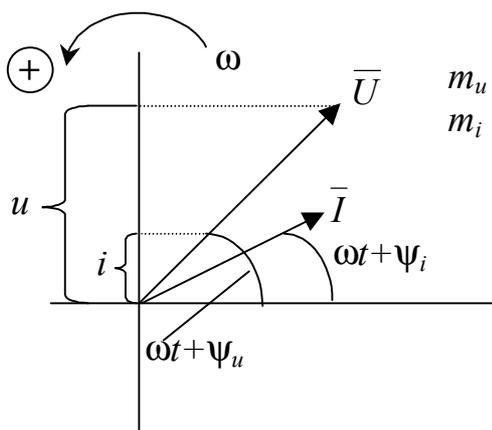


Рис. 2.4

Вращающиеся векторы могут быть мысленно остановлены в любой момент времени, в том числе когда фаза одного из векторов будет равна нулю. При этом векторы всех остальных величин останутся повернутыми по отношению к этому вектору на неизменную величину.

Совокупность векторов, характеризующих процессы, происходящие в той или иной цепи переменного тока,

построенные с соблюдением правильной ориентации их относительно друг друга, называют векторной диаграммой.

Векторная диаграмма может быть построена как для амплитудных, действующих, так и средних значений. Обычно, если не оговорено особо, векторная диаграмма строится для действующих значений.

2.5. Активное сопротивление в цепи синусоидального тока

Активное электрическое сопротивление – параметр пассивного двухполюсника, равный отношению активной мощности, поглощаемой в этом двухполюснике, к квадрату действующего значения тока через этот двухполюсник (ГОСТ Р52002-2003).

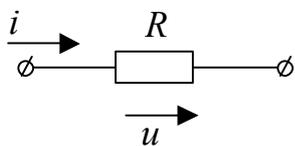


Рис. 2.5

Пусть к активному сопротивлению (рис. 2.5) приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ с начальной фазой $\psi_u = 0$. Тогда по закону Ома

$$u = iR, \quad iR = U_m \sin \omega t, \quad i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t, \quad \psi_i = 0.$$

Значит, $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

На участке цепи с активным сопротивлением ток совпадает по фазе с напряжением на этом участке.

Векторная диаграмма действующих значений тока и напряжения, графики зависимостей мгновенных значений тока и напряжений приведены на рис. 2.6.

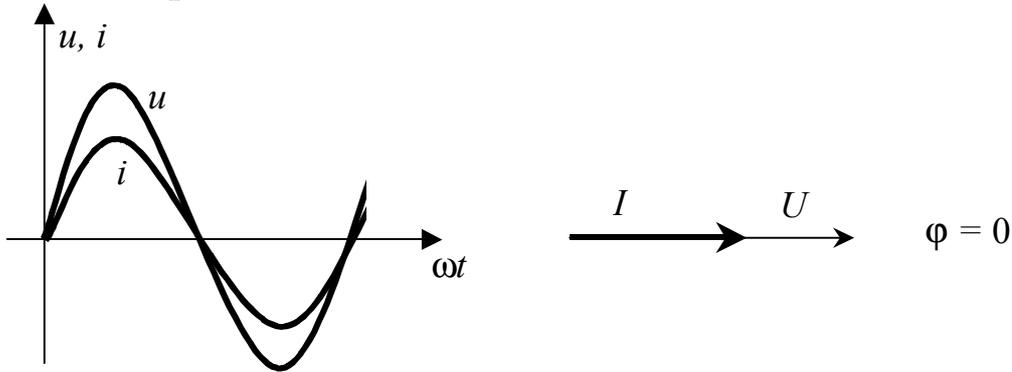


Рис. 2.6

$$I_m = \frac{U_m}{R}; \quad I = \frac{U}{R}; \quad I_{\text{ср}} = \frac{U_{\text{ср}}}{R}.$$

2.6. Индуктивность в цепи синусоидального тока

Пусть в ветви с индуктивностью L (рис. 2.7) ток синусоидален с начальной фазой $\psi_i = 0$

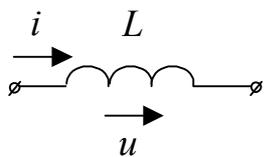


Рис. 2.7

В катушке с индуктивностью L наводится ЭДС самоиндукции e_L

$$I = I_m \sin \omega t.$$

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$$

или

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt};$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} I_m \sin \omega t = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

где U_m – модуль амплитудного значения напряжения, $U_m = \omega L I_m$, [В];

X_L – индуктивное сопротивление, $X_L = \omega L = 2\pi f L$, [Ом].

$$\psi_u = \pi/2, \quad \psi_i = 0, \quad \varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/2.$$

Ток в индуктивности отстает от приложенного напряжения на угол $\pi/2$.

Векторная диаграмма действующих значений тока и напряжения, графики зависимостей мгновенных значений тока и напряжений на индуктивности приведены на рис. 2.8

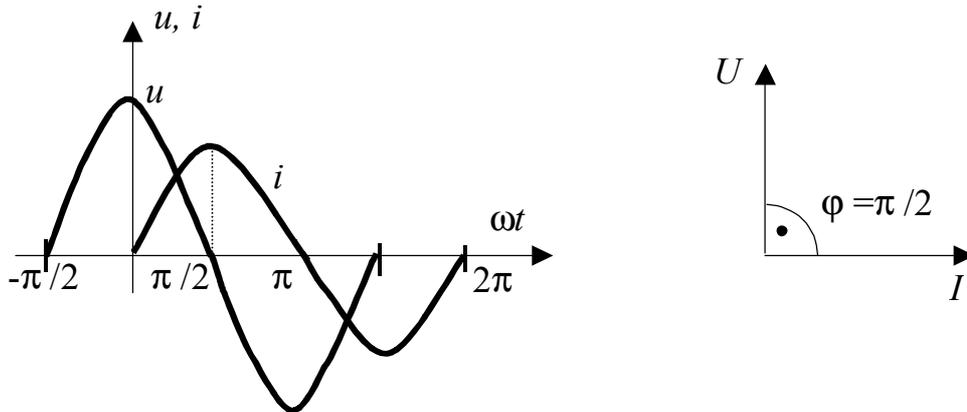


Рис. 2.8

$$I_m = \frac{U_m}{X_L} = \frac{U_m}{\omega L}, \quad I = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}, \quad I_{\text{ср}} = \frac{U_{\text{ср}}}{X_L} = \frac{U_{\text{ср}}}{\omega L}.$$

2.7. Емкость в цепи синусоидального тока

Пусть к емкости C (рис. 2.9) приложено синусоидальное напряжение с начальной фазой $\psi_u = 0$

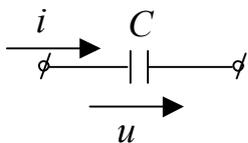


Рис. 2.9

$$u = U_m \sin \omega t,$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) = C \frac{du}{dt},$$

$$i = C \frac{d}{dt} U_m \sin \omega t = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

где I_m – модуль амплитудного значения тока; X_C – емкостное сопротивление

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad [\text{Ом}],$$

$$\psi_u = 0, \quad \psi_i = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

В емкости ток опережает напряжение на угол $\pi/2$.

Векторная диаграмма действующих значений тока и напряжения, графики зависимостей мгновенных значений тока и напряжений приведены на рис. 2.10.

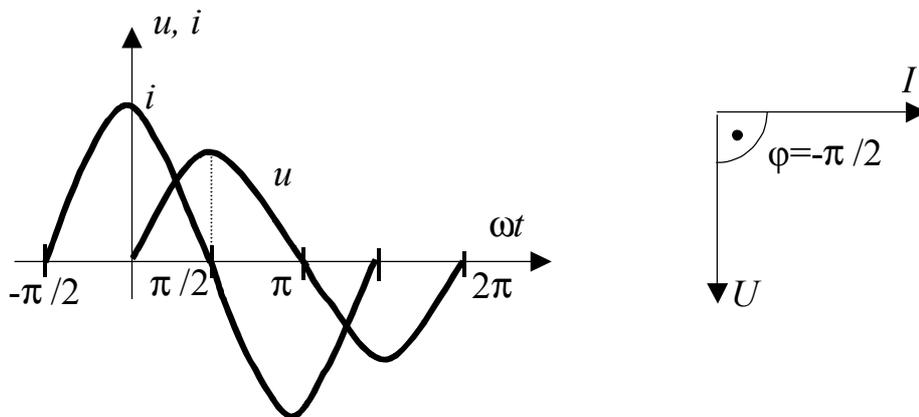


Рис. 2.10

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} = \omega C U_m, \quad I = \frac{U}{X_C} = \omega C U, \quad I_{\text{ср}} = \frac{U_{\text{ср}}}{X_C} = \omega C U_{\text{ср}}.$$

2.8. Установившийся синусоидальный ток в цепи с последовательным соединением участков R, L, C

Запишем дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи с последовательно соединенными участками R, L, C (рис. 2.11)

$$u = u_R + u_L + u_C,$$

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_c(0).$$

Пусть приложенное к цепи напряжение изменяется по синусоидальному закону

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Тогда ток в установившемся режиме также будет синусоидальным с такой же частотой ω

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

Требуется найти I_m и φ . Если выбрать начальную фазу тока $\psi_i = 0$, то произвольно ориентированная векторная диаграмма повернется

на угол ψ_I , и вектор тока займет горизонтальное положение, и тогда $\psi_u = \varphi$ (рис. 2.12).

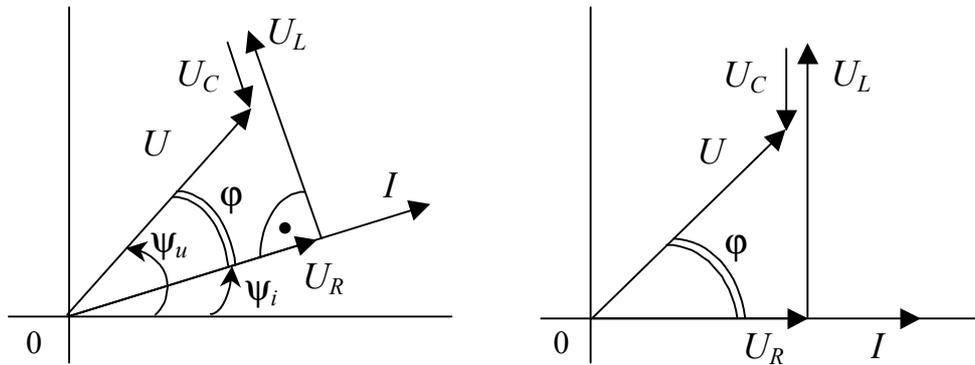


Рис. 2.12

Следовательно, имеем

$$i = I_m \sin \omega t,$$

$$u = U_m \sin (\omega t + \psi_u) = U_m \sin (\omega t + \varphi).$$

Подставим i и u в исходное уравнение, записанное по второму закону Кирхгофа, и после преобразования получим

$$RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t + \frac{1}{\omega C} I_m + U_C(0) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Так как при синусоидальном напряжении ток в цепи должен быть синусоидальным и не может содержать постоянных составляющих, то

$$\frac{1}{\omega C} I_m + U_C(0) = 0.$$

Полученное уравнение справедливо для любого момента времени ωt , в том числе:

– для $\omega t = \pi/2$

$$RI_m = U_m \cos \varphi, \quad (2.1)$$

– и для $\omega t = 0$

$$(\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m = U_m \sin \varphi. \quad (2.2)$$

Возведем (2.1) и (2.2) в квадрат и, сложив их, получим

$$\left[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 \right] I_m^2 = U_m^2,$$

откуда найдем связь между амплитудами тока и напряжения

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (2.3)$$

Поделив выражение (2.2) на (2.1), найдем $\operatorname{tg}\varphi$, а затем искомую величину разности фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

В выражении (2.3) в знаменателе стоит величина, имеющая размерность электрического сопротивления, ее обозначают через Z и называют полным сопротивлением цепи.

Полное электрическое сопротивление – параметр пассивного двухполюсника, равный отношению действующего значения электрического напряжения на входе этого двухполюсника к действующему значению электрического тока через двухполюсник при синусоидальном электрическом напряжении и электрическом токе (ГОСТ Р52002-2003)

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{U_{\text{ср}}}{I_{\text{ср}}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Величину $(\omega L - 1/\omega C) = X$ называют реактивным сопротивлением.

Реактивное сопротивление – параметр пассивного двухполюсника, равный квадратному корню из разности квадратов полного и активного электрических сопротивлений двухполюсника, взятому со знаком плюс, если электрический ток отстает по фазе от электрического напряжения, и со знаком минус, если электрический ток опережает по фазе напряжение (ГОСТ Р52002-2003).

2.9. Установившийся синусоидальный ток в цепи с параллельным соединением участков G , L и C

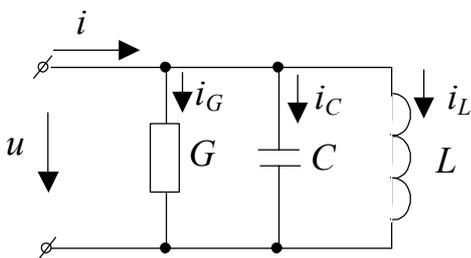


Рис. 2.13

Запишем дифференциальное уравнение по первому закону Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 2.13

$$i_G + i_C + i_L = i$$

$$Gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0) = i.$$

Пусть к цепи приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Требуется найти I_m и φ .

При синусоидальном напряжении ток также будет синусоидальным и может быть представлен в виде $i = I_m \sin(\omega t - \psi_i)$.

Целесообразно предположить, что $\psi_u = 0$, тогда $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. Векторная диаграмма токов для случая $\psi_u = 0$ приведена на рис. 2.14. Подставляя мгновенные значения тока и напряжения в исходное дифференциальное уравнение, после преобразования получим

$$GU_m \sin \omega t + \omega CU_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \frac{1}{\omega L} U_m + i_L(0) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

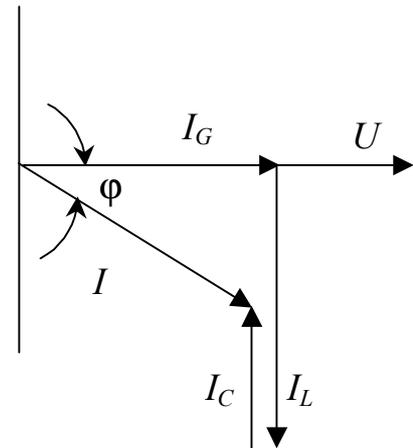


Рис. 2.14

При этом считаем, что $\left[\frac{1}{\omega L} U_m + i_L(0) \right] = 0$,

так как при синусоидальном напряжении ток в цепи должен быть синусоидальным и не может содержать постоянных составляющих. Последнее уравнение справедливо для любого ωt , в том числе:

– для $\omega t = \pi / 2$

$$GU_m = I_m \cos \varphi,$$

– и для $\omega t = 0$

$$\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U_m = I_m \sin \varphi.$$

Возведя первое и второе равенство в квадрат и сложив их, получим

$$I_m = U_m \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}.$$

Поделив второе равенство на первое, найдем $\operatorname{tg} \varphi$ и искомую разность

фаз φ как

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}.$$

Величину $Y = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ называют полной проводимостью цепи [См, Ом⁻¹] – параметр пассивного двухполюсника, равный отношению действующего значения электрического тока через этот двухполюсник к действующему значению электрического напряжения между выводами двухполюсника, при синусоидальном электрическом напряжении и электрическом токе (ГОСТ Р52002-2003), где G – активная проводимость, а $B = \frac{1}{\omega L} - \omega C$, [См, Ом⁻¹] – реактивная проводимость. При этом $\frac{1}{\omega L} = B_L$ – индуктивная проводимость, а $\omega C = B_C$ – емкостная проводимость.

Глава 3. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ ТОКЕ

Определение токов и напряжений в установившемся режиме, когда токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени, связано с нахождением частных решений неоднородных дифференциальных уравнений, записываемых на основе законов Кирхгофа, что само по себе является сложной процедурой. Но даже простая реализация первого или второго законов Кирхгофа, требующая суммирования, соответственно, токов или напряжений и ЭДС, сопряжена с громоздкими трудоемкими преобразованиями и вычислениями. Кроме того, в отличие от цепей постоянного тока, где рассчитываются только значения токов (или напряжения), в цепях синусоидального тока необходимо определить их модуль и начальную фазу. Это приводит к удвоению количества неизвестных и, следовательно, к такому же увеличению количества уравнений.

Существенное упрощение вычислений достигается использованием комплексного (символического) метода расчета. Суть комплексного метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока, напряжения, ЭДС.

3.1. Комплексные числа

Комплексное число A , изображенное на рис. 3.1 на комплексной плоскости, можно записать в показательной, тригонометрической и алгебраических формах,

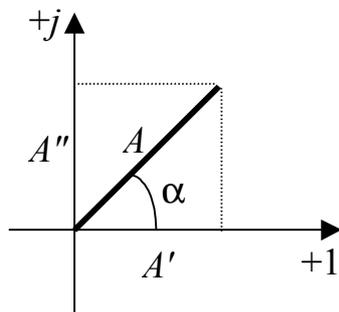


Рис. 3.1

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = A' + jA'',$$

где A' , A'' , A , α – действительные числа; а $j = \sqrt{-1}$ или $j^2 = -1$.

Вещественная часть комплексного числа

$$\operatorname{Re} \underline{A} = A'.$$

Мнимая часть комплексного числа

$$\operatorname{Im} \underline{A} = A''.$$

Сопряженное комплексное число

$$\underline{A}^* = A e^{-j\alpha}, \quad \underline{A}^* = A' - j A''.$$

Модуль комплексного числа

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}.$$

Аргумент комплексного числа

$$\alpha = \operatorname{arctg} A''/A'.$$

Свойства единичного комплексного числа представлены на рис.

3.2.

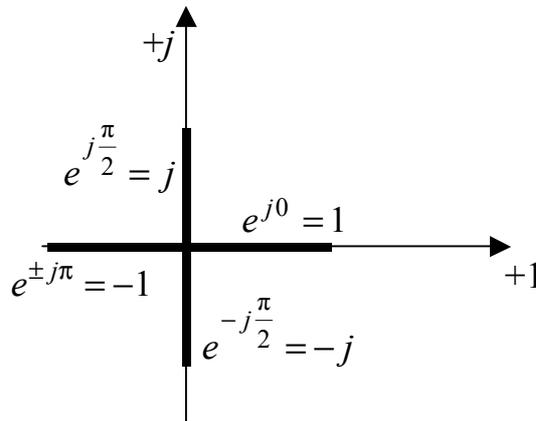


Рис. 3.2

*Алгебраическая
форма*

$$\underline{U} = U' + jU''$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

Показательная форма

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

*Тригонометрическая
форма*

$$\underline{U} = U \cos \alpha + j U \sin \alpha$$

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$$

Удобна при сложении и вычитании

Удобна при умножении, делении, извлечении корня, возведении в степень и т.д.

Удобна при переходе от показательной к алгебраической форме

3.1.1. Действия над комплексными числами

Сложение комплексных чисел

$$\underline{A} + \underline{B} = (A' + j A'') + (B' + j B'') = (A' + B') + j(A'' + B'').$$

Вычитание комплексных чисел

$$\underline{A} - \underline{B} = (A' + j A'') - (B' + j B'') = (A' - B') + j(A'' - B'').$$

Умножение комплексных чисел

$$\underline{A} \times \underline{B} = A e^{j\alpha} \times B e^{j\beta} = A \times B e^{j(\alpha + \beta)}.$$

Деление комплексных чисел

$$\underline{A} / \underline{B} = A e^{j\alpha} / B e^{j\beta} = (A/B) e^{j(\alpha - \beta)}.$$

Комплексные числа

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = A' + j A'' \quad , \quad \underline{B} = B e^{j\beta} = B' + j B''$$

равны между собой:

- в показательной форме записи, если $A = B$, $\alpha = \beta$;
- в алгебраической форме записи, если $A' = B'$, $A'' = B''$.

3.2. Изображение синусоидально изменяющихся величин на комплексной плоскости

Из курса математики известна формула Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha. \quad (3.1)$$

Комплексное число $e^{j\alpha}$ изображают на комплексной плоскости вектором, численно равным 1 и составляющим угол α с осью вещественных чисел. Умножим левую и правую части выражения (3.1) на I_m

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos\alpha + j I_m \sin\alpha. \quad (3.2)$$

Угол α в (3.1) может быть любым. Положим, что $\alpha = \omega t + \psi$, т. е. угол α изменяется пропорционально времени, тогда (3.2) можно переписать

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi),$$

где $\operatorname{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \psi)}\} = I_m \cos(\omega t + \psi)$;
 $\operatorname{Im}\{I_m e^{j(\omega t + \psi)}\} = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

Таким образом, синусоидально изменяющийся ток можно представить в виде

$$i = \operatorname{Im}\{I_m e^{j(\omega t + \psi)}\}, \quad (3.3)$$

т. е. как проекцию $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ на ось мнимых чисел.

Комплексное число $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ можно представить

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\omega t} e^{j\psi} = \underline{I} e^{j\omega t}, \quad (3.4)$$

где $\underline{I} = I_m e^{j\psi}$ – комплексная амплитуда; модуль ее равен I_m , а угол, под которым вектор I_m проведен к оси вещественных чисел, равен начальной фазе ψ .

Комплексная амплитуда синусоидального электрического тока – комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе данного синусоидального электрического тока (ГОСТ Р52002-2003).

Комплексная амплитуда изображает соответствующую величину: ток, напряжение, ЭДС на комплексной плоскости для момента времени $\omega t = 0$.

Перепишем (3.3)

$$i = I_m \sin \omega t = \text{Jm}\{I_m e^{j(\omega t + \psi)}\}.$$

Заменим равенство и знак мнимой части (Jm) на знак соответствия (\doteq), тогда

$$i \doteq I_m e^{j(\omega t + \psi)},$$

а учитывая (3.4), последнее выражение можно записать

$$i \doteq \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Пример 1. Переход от мгновенного значения к комплексной амплитуде.

Пусть $i = 10 \sin (\omega t + 45^\circ)$ А, где $I_m = 10$ А, $\psi = 45^\circ$, тогда $\underline{I}_m = 10 e^{j45^\circ}$ А.

Пример 2. Переход от комплексной амплитуды к мгновенному значению.

Пусть $\underline{I}_m = 100 e^{-j30^\circ}$ А, тогда $i = 100 \sin (\omega t - 30^\circ)$ А.

3.3. Выражение для производной

Пусть имеем $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. Найдем выражение для производной

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \psi) = \omega I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}),$$

$$\omega I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}) \doteq \omega I_m e^{j(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})},$$

где

$$\omega I_m e^{j(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})} = \omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} e^{j\psi} =$$

$$= \left[\text{так как } e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \text{ а } I_m e^{j\psi} = \underline{I}_m, \text{ то} \right] = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}. \quad (3.5)$$

следовательно, соответствие (3.5) можно переписать как

$$\frac{di}{dt} \doteq j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}, \quad \frac{d^n i}{dt^n} \doteq (j\omega)^n \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Операция дифференцирования синусоидально изменяющейся величины заменяется на операцию умножения комплексной амплитуды на множитель $j\omega$.

3.4. Выражение для интеграла

Пусть имеем $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. Найдем выражение для интеграла

$$\int i dt = \int I_m \sin(\omega t + \psi) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}),$$

$$\frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) \doteq \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})},$$

где

$$\frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} e^{j\psi} =$$

$$= \left[\text{так как } e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}, \text{ а } I_m e^{j\psi} = \underline{I}_m, \text{ то} \right] = \frac{\underline{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}. \quad (3.6)$$

Следовательно, соответствие (3.6) можно переписать

$$\int i dt \doteq \frac{1}{j\omega} \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Операция интегрирования синусоидально изменяющейся величины заменяется на операцию деления комплексной амплитуды на множитель $j\omega$.

3.5. Алгебраизация уравнений

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи с последовательно соединенными участками активного, индуктивного и емкостного характера, к зажимам которого приложено синусоидальное напряжение (рис. 3.3)

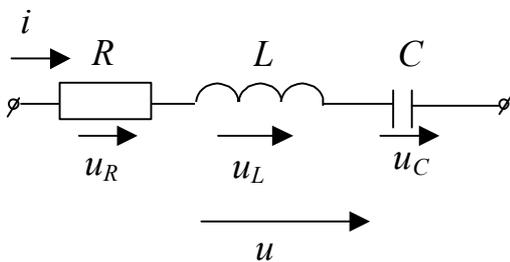


Рис. 3.3

$$u_R + u_L + u_C = u,$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_C(0) = u. \quad (3.7)$$

Пусть емкость C предварительно не заряжена, т. е. $U_C(0) = 0$. Уравнение (3.7) в комплексной форме будет иметь вид

$$R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}.$$

Вынесем \underline{I}_m за скобки, сократим на множитель $e^{j\omega t}$ обе части уравнения, получим

$$\underline{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m. \quad (3.8)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (3.7), записанное для мгновенных значений, преобразуется в алгебраическое уравнение (3.8) для комплексных амплитуд. Аналогичное уравнение можно записать для комплексных действующих и значений

$$\underline{I} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U},$$

и для комплексных средних значений

$$\underline{I}_{\text{cp}} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_{\text{cp}}.$$

3.6. Закон Ома для цепи синусоидального тока. Комплексное сопротивление

Множитель $\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)$ в уравнении (3.8) представляет собой комплекс, имеющий размерность сопротивления – комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

где R – активное, X – реактивное сопротивления; Z – модуль полного сопротивления ($Z = \sqrt{R^2 + X^2}$), а φ – угол сдвига фаз, $\varphi = \arctg(X/R)$.

Комплексное электрическое сопротивление – комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения на выводах пассивной электрической цепи или ее элемента к комплексному действующему значению синусоидального электрического тока в этой цепи или в этом элементе (ГОСТ Р 52002-2003).

Уравнение (3.8) можно переписать

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}, \quad (3.9)$$

или, переходя к комплексам действующих значений,

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}. \quad (3.10)$$

Выражения (3.9) и (3.10) представляют собой закон Ома для синусоидального тока, соответственно для амплитудных и действующих значений. Обобщенный закон Ома для цепи синусоидального тока для действующих значений может быть записан

$$\underline{I} = \frac{\pm \underline{E} \pm \underline{U}}{\underline{Z}}.$$

Правило выбора знаков аналогично, как и для случая постоянного тока.

3.7. Комплексная проводимость

Комплексная электрическая проводимость – комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического тока в пассивной электрической цепи или ее элемента к комплексному действующему значению синусоидального электрического напряжения на выводах этой цепи или на этом элементе (ГОСТ Р52002-2003).

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}, \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB = Ye^{-j\varphi} \text{ [Ом}^{-1}\text{]} \text{ или [См]},$$

где $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; $\varphi = \arctg \frac{-B}{G}$.

3.8. Треугольник сопротивлений и треугольник проводимостей

Треугольник сопротивлений можно получить из векторной диаграммы цепи с последовательно соединенными участками активного, индуктивного и емкостного характера (рис. 3.4).

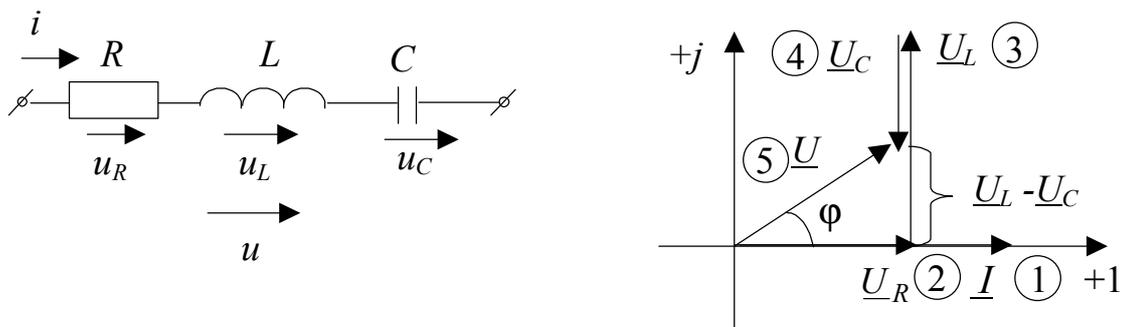


Рис. 3.4

Последовательность построения векторов указана в окружностях.

Если все напряжения, составляющие векторную диаграмму, поделить на одну и ту же величину, очевидно, что получим такую же диаграмму, только в измененном масштабе. Если в качестве такой величины выбрать значение тока, который одинаков для всех элементов последовательной цепи, то получим соответствующие сопротивления. Учитывая, что сопротивления имеют скалярный характер, полу-

чим так называемый треугольник сопротивлений, где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ (рис. 3.5).

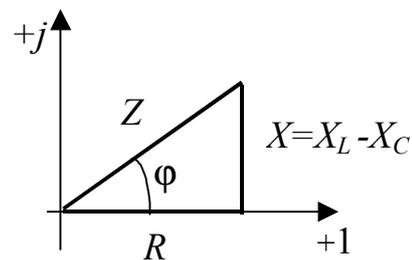


Рис. 3.5

Аналогично, рассматривая векторную диаграмму токов электрической цепи с параллельно соединенными активным, индуктивным и емкостным элементами (см. раздел 2.9), получим треугольник проводимостей (рис. 3.6)

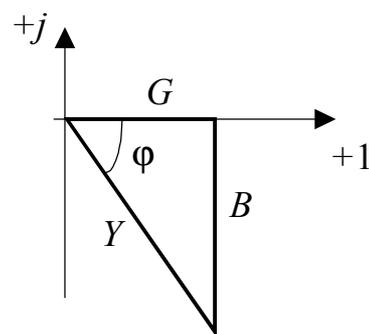


Рис. 3.6

$$\varphi = \arctg \frac{-B}{G}; \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

3.9. Законы Кирхгофа в комплексной форме

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме записи

$$\sum \underline{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме записи

$$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k \underline{I}_k.$$

3.10. Активная, реактивная и полная мощности

Под активной мощностью P в электрической цепи синусоидального тока понимают величину, равную среднеарифметическому значению мгновенной мощности за период (ГОСТ Р52002-2003)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt, \quad (3.11)$$

где $p = ui$ – мгновенное значение мощности.

Пусть

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Если принять $\psi_u=0$, то $\varphi = \psi_u - \psi_i = -\psi_i$, т. е. $\psi_i = -\varphi$;
 $u = U_m \sin \omega t$,
 $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$.

Подставим выражения для мгновенных значений i и u в (3.11)

$$P = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt$$

и воспользуемся известным тригонометрическим соотношением

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

получим

$$P = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \omega t - \varphi)] dt = \frac{U_m I_m}{2T} \left[\int_0^T \cos \varphi dt - \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt \right] = \frac{U \sqrt{2} I \sqrt{2}}{2T} \int_0^T \cos \varphi dt = \frac{UI}{T} \cos \varphi \Big|_0^T = UI \cos \varphi,$$

$$P = UI \cos \varphi.$$

Рассмотрим способ определения активной и реактивной мощностей в комплексной форме записи. Пусть напряжение на участке цепи $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$, а ток $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$. Учитывая, что для определения активной и реактивной мощностей следует использовать разность фаз φ , которая рассчитывается в виде $\varphi = \psi_u - \psi_i$, при вычислении комплексной мощности в виде произведения комплексных чисел комплекс тока следует взять сопряженным.

Комплексная мощность – комплексная величина, равная произведению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения и сопряженного комплексного действующего значения синусоидального электрического тока (ГОСТ Р52002-2003).

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} =$$

$$= IUe^{j\varphi} = IU \cos \varphi + jIU \sin \varphi = P + jQ,$$

где $\text{Re}\{\underline{U} \underline{I}^*\} = P$ [Вт] – активная мощность, $\text{Im}\{\underline{U} \underline{I}^*\} = Q$ [ВАр] – реактивная мощность – величина, равная при синусоидальном электрическом токе и электрическом напряжении произведению дейст-

вующего значения напряжения на действующее значение тока и на синус сдвига фаз между напряжением и током (ГОСТ Р52002-2003);

$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ – модуль полной комплексной мощности или просто *полная мощность* [ВА] – величина, равная произведению действующих значений электрического тока и электрического напряжения на входе двухполюсника (ГОСТ Р52002-2003).

Такой же результат по определению активной, реактивной и полной мощностей можно получить из анализа векторной диаграммы активно-реактивной цепи, например, цепи с последовательным соединением R, L, C элементов (рис. 3.4).

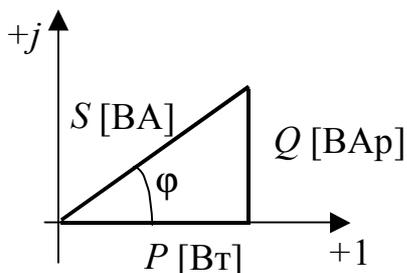


Рис. 3.7

Если стороны полученного векторного треугольника напряжений: $U_R, (U_L - U_C), U$ – умножить на одну ту же величину, например, ток I , то получим подобный треугольник мощностей (рис. 3.7), где

$$S = IU = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

$$P = UI \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi.$$

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты в резисторе R и измеряется с помощью ваттметра $P = UI \cos \varphi = I^2 R$.

Реактивная мощность $Q = UI \sin \varphi$ пропорциональна энергии, которая идет на создание электрического и магнитного поля емкости и индуктивности и измеряется с помощью счетчиков реактивной энергии.

Модуль полной мощности S может быть найден с помощью амперметра и вольтметра, тогда как ваттметр измеряет активную мощность (рис. 3.8).

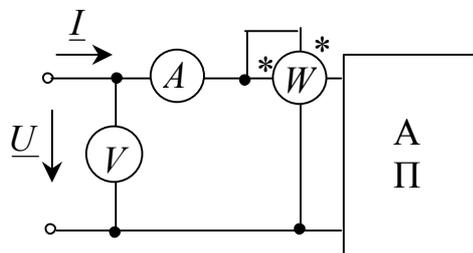


Рис. 3.8

Множитель $\cos \varphi$ в выражении для подсчета активной мощности называют коэффициентом мощности. *Коэффициент мощности* – скалярная величина, равная отношению активной мощности к полной (ГОСТ Р52002-2003). Так как $\cos \varphi \leq 1$, то и $P \leq UI$. Электрическое оборудование, в том числе и электрические

машины, рассчитано на определенное напряжение U , обусловленное

типом и качеством изоляции, и на определенный ток, обусловленный допустимым нагревом проводников. Наивысшее использование свойств электротехнических устройств будет в случае, когда $\cos\varphi$ равен единице.

Методы повышения $\cos\varphi$:

а) естественный – работа энергетического оборудования в номинальном режиме,

б) искусственный – установка компенсирующих устройств. Так, при индуктивном характере нагрузки в качестве компенсаторов используют батареи конденсаторов либо специальные электрические машины – синхронные компенсаторы.

Пример. Определить S , Q , P для цепи, представленной на рис. 3.9 при $\underline{I} = 1 + j5$ А, $\underline{U} = 10 + j20$ А.

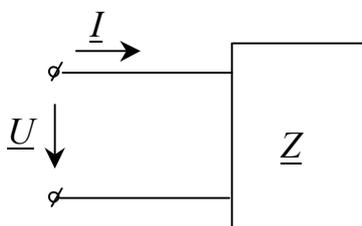


Рис. 3.9

Решение.

1) Первый способ:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (10 + j20)(1 - j5) = 10 + j20 - j50 - j^2 100 = 90 - j30, \text{ ВА.}$$

$$P = 90 \text{ Вт}, \quad Q = -30 \text{ ВАр}, \quad S = \sqrt{90^2 + 30^2} \text{ ВА.}$$

2) Второй способ:

$$\underline{S} = \underline{U}^* \underline{I} = (10 - j20)(1 + j5) = 10 + j50 - j20 - j^2 100 = 90 + j30, \text{ ВА.}$$

$$P = 90 \text{ Вт}, \quad Q = 30 \text{ ВАр}, \quad S = \sqrt{90^2 + 30^2} \text{ ВА.}$$

Таким образом, как первый, так и второй способы дают одинаковые результаты расчета полной и активной мощности, тогда как реактивная мощность отличается только знаком.

3.11. Расчет сложных электрических цепей комплексным методом

Расчет сложных линейных электрических цепей синусоидального тока комплексным методом осуществляется с помощью всех известных методов теории линейных электрических цепей постоянного тока. Все методы применимы в общем случае без ограничений.

Пример. Записать систему уравнений, составленных по законам Кирхгофа, методам контурных токов и узловых потенциалов для электрической схемы, представленной на рис. 3.10.

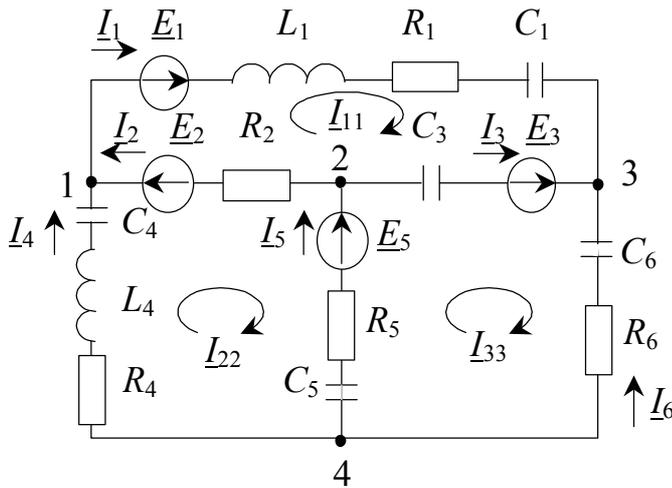


Рис. 3.10

Решение.

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2,$$

$$\underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_3},$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 + j\omega L_4 - j\frac{1}{\omega C_4},$$

$$\underline{Z}_5 = R_5 - j\frac{1}{\omega C_5},$$

$$\underline{Z}_6 = R_6 - j\frac{1}{\omega C_6}.$$

По законам Кирхгофа

$$\begin{array}{l} \text{Первый узел:} \\ \text{Второй узел:} \\ \text{Третий узел:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_2 + \underline{I}_4 - \underline{I}_1 = 0, \\ \underline{I}_5 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I}_6 + \underline{I}_3 + \underline{I}_1 = 0, \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 - \underline{E}_3, \\ \underline{I}_4 \underline{Z}_4 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_5 \underline{Z}_5 = -\underline{E}_2 - \underline{E}_5, \\ \underline{I}_5 \underline{Z}_5 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{I}_6 \underline{Z}_6 = \underline{E}_3 + \underline{E}_5. \end{array} \right.$$

Метод контурных токов

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_{11} \underline{Z}_{11} + \underline{I}_{22} \underline{Z}_{12} + \underline{I}_{33} \underline{Z}_{13} = \underline{E}_{11}, \\ \underline{I}_{11} \underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22} \underline{Z}_{22} + \underline{I}_{33} \underline{Z}_{23} = \underline{E}_{22}, \\ \underline{I}_{11} \underline{Z}_{31} + \underline{I}_{22} \underline{Z}_{32} + \underline{I}_{33} \underline{Z}_{33} = \underline{E}_{33}. \end{array} \right.$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3,$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5,$$

$$\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_6 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_3,$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_2,$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_3,$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_5,$$

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 - \underline{E}_3,$$

$$\underline{E}_{22} = -\underline{E}_2 - \underline{E}_5,$$

$$\underline{E}_{33} = \underline{E}_5 + \underline{E}_3.$$

Метод узловых потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= 0, \\ \begin{cases} \varphi_1 \underline{Y}_{11} + \varphi_2 \underline{Y}_{12} + \varphi_3 \underline{Y}_{13} = \underline{J}_{11}, \\ \varphi_1 \underline{Y}_{21} + \varphi_2 \underline{Y}_{22} + \varphi_3 \underline{Y}_{23} = \underline{J}_{22}, \\ \varphi_1 \underline{Y}_{31} + \varphi_2 \underline{Y}_{32} + \varphi_3 \underline{Y}_{33} = \underline{J}_{33}, \end{cases} \\ \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_4}, \\ \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 &= \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5}, \\ \underline{Y}_{33} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6 &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_6}; \\ \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_2 &= -\frac{1}{\underline{Z}_2}, \\ \underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_3 &= -\frac{1}{\underline{Z}_3}, \\ \underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -\underline{Y}_1 &= -\frac{1}{\underline{Z}_1}; \\ \underline{J}_{11} &= \underline{E}_2 \underline{Y}_2 - \underline{E}_1 \underline{Y}_1, \\ \underline{J}_{22} &= -\underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_5 \underline{Y}_5 - \underline{E}_3 \underline{Y}_3, \\ \underline{J}_{33} &= \underline{E}_3 \underline{Y}_3 + \underline{E}_1 \underline{Y}_1. \end{aligned}$$

Расчет линейных электрических цепей синусоидального тока в установившемся режиме комплексным методом аналогичен расчету электрических цепей постоянного тока и производится по алгебраическим уравнениям, составленным по методам, основанным на законах Ома и Кирхгофа.

Алгоритм расчета комплексным методом

1. Мгновенные значения напряжения источников ЭДС, токов источников тока заменяют соответствующими комплексными величинами

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad \underline{U} = U_m e^{j\psi_u}, \\ I &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad \underline{I} = I_m e^{j\psi_i}. \end{aligned}$$

2. В зависимости от выбранного метода расчета вычисляют комплексные сопротивления $\underline{Z}_K = R_K \pm jX_K$ или комплексные проводимости ветвей $\underline{Y}_K = G_K \pm jB_K$.

Выбор рационального метода расчета сложной электрической цепи осуществляется, исходя из поставленной задачи и особенностей физической модели цепи, представленной в виде электрической схемы. Все рекомендации по выбору расчетных методик для цепей постоянного тока применимы и к выбору расчетных методик в комплексной форме для цепей синусоидального тока.

3. Составляют алгебраическое уравнение или систему алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами и решают относительно искомой комплексной величины, например, тока $\underline{I}_K = I_K e^{j\Psi_{iK}}$.

4. При необходимости осуществляют переход от комплексных величин к мгновенному значению

$$\underline{I}_K = I_K e^{j\Psi_{iK}} \quad \text{Р} \quad i_K = I_{mK} \sin(\omega t + \Psi_{iK}).$$

Глава 4. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Явление в электрической цепи, содержащей участки, имеющие индуктивный и емкостной характер, при котором разность фаз синусоидального электрического напряжения и синусоидального электрического тока на входе цепи равна нулю, называют резонансом (ГОСТ Р52002-2003).

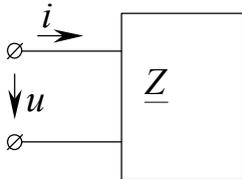


Рис. 4.1

Пусть имеется цепь, изображенная на рис. 4.1:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Условие резонанса для такой цепи

$$\varphi = 0. \tag{4.1}$$

Различают резонанс напряжений и резонанс токов.

4.1. Резонанс напряжений

Резонансом напряжений называют явление резонанса в участке электрической цепи, содержащей последовательно соединенные индуктивный и емкостной элементы (ГОСТ Р52002-2003).

Определим полное комплексное сопротивление R , L , C цепи (рис. 4.2)

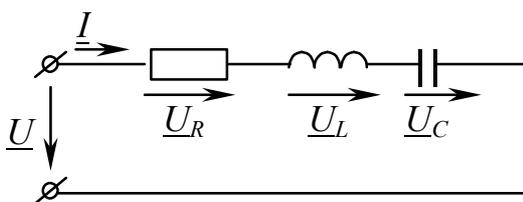


Рис. 4.2

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = Ze^{j\varphi},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X^2};$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{4.2}$$

Условие (4.1) $\varphi = 0$ выполнимо, если в выражении (4.2) соблюдается условие

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \text{ или } \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

что равносильно

$$\omega^2 LC = 1. \tag{4.3}$$

Отсюда следует, что резонанса можно достичь изменением частоты, индуктивности, емкости:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}; \\ L_0 &= \frac{1}{\omega^2 C}; \\ C_0 &= \frac{1}{\omega^2 L}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Частоту ω_0 называют резонансной частотой (L и C заданы), соответственно L_0 и C_0 – резонансными индуктивностью и емкостью.

Выполнение условия равенства индуктивного и емкостного сопротивлений (4.3) для последовательной цепи означает, что и напряжения на этих участках цепи будут одинаковы по модулю

$$|U_L| = |U_C|.$$

Условие (4.3) $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, справедливое для цепи с последовательно соединенными R , L , C элементами, может быть переписано в виде условия резонанса напряжений для любой цепи

$$Jm\{\underline{Z}\} = 0.\tag{4.5}$$

Ток в последовательной R , L , C цепи можно определить

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

В режиме резонанса это выражение сводится к $\underline{I} = \underline{U}/R$. При этом ток I имеет максимальное значение.

Если реактивные сопротивления $X_C = X_L$ при резонансе превосходят по значению активное сопротивление R , то напряжения на индуктивности и емкости могут значительно превысить напряжение на сопротивлении и, следовательно, на входе цепи. Поэтому резонанс при последовательном соединении называют резонансом напряжений.

Векторные диаграммы для трех режимов работы: дорезонансного, резонансного, послерезонансного – приведены на рис. 4.3.

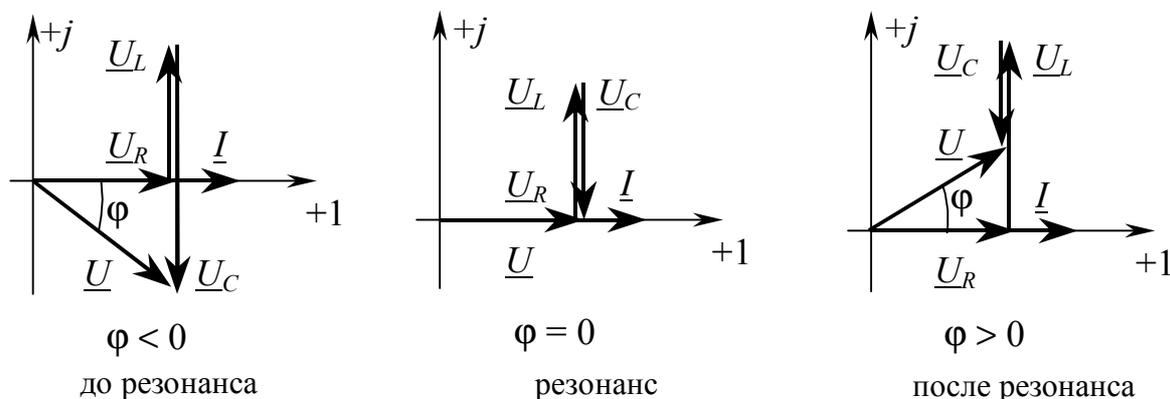


Рис. 4.3

Свойства резонансного контура могут быть описаны с помощью волнового сопротивления, добротности, затухания.

Волновое сопротивление контура определяется величиной реактивного сопротивления емкости или индуктивности в момент резонанса:

$$\rho = X_{L_0} = X_{C_0},$$

где $X_{L_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \frac{\sqrt{L^2}}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}};$

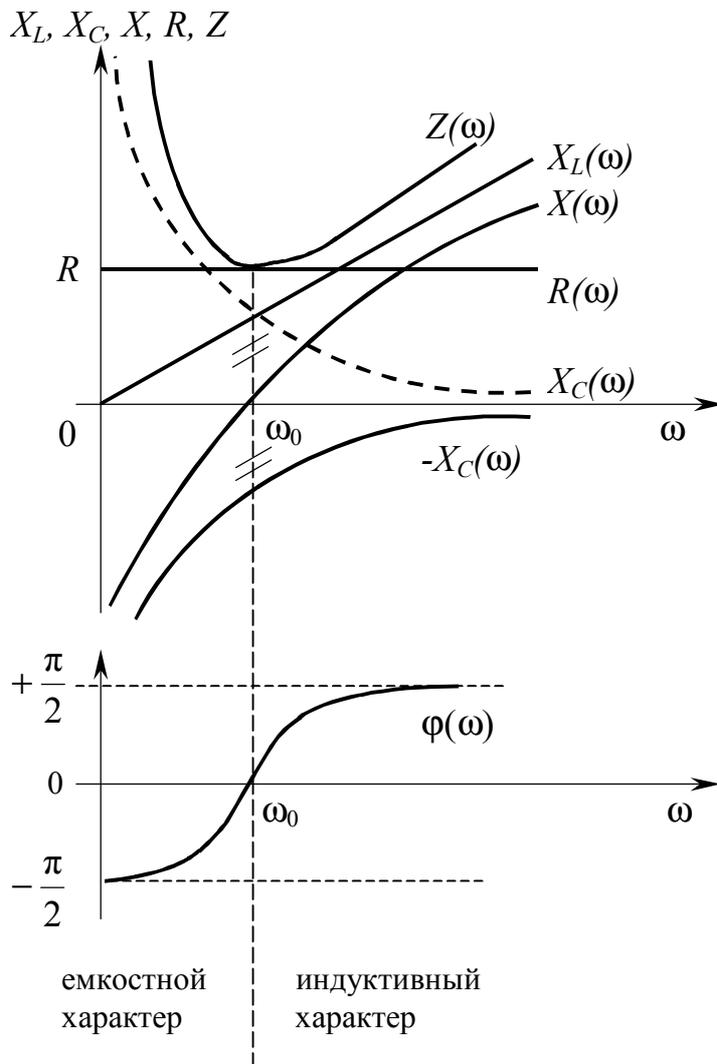
$$X_{C_0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C} = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Волновое сопротивление резонансного контура $\rho = \sqrt{L/C}$, [Ом] определяется индуктивностью, емкостью и не зависит от частоты приложенного напряжения.

Добротность – безразмерная величина, показывающая, во сколько раз напряжение на реактивном элементе больше входного (или на активном сопротивлении), если цепь находится в режиме резонанса

$$Q = \frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{I_0 X_{L_0}}{I_0 R} = \frac{X_{L_0}}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Затухание – безразмерная величина, обратная добротности
 $d = 1/Q$.



Зависимости полного, реактивного, активного сопротивлений или проводимостей цепи, угла разности фаз φ от частоты называют частотными характеристиками (рис. 4.4).

$$R(\omega) = R,$$

$$X_L(\omega) = \omega L,$$

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C},$$

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + X^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

Рис. 4.4

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} = \frac{1}{R(\omega) + jX(\omega)} \cdot \frac{R(\omega) - jX(\omega)}{R(\omega) - jX(\omega)} =$$

$$= \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} - j \frac{X(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)} = G(\omega) - jB(\omega),$$

где $B(\omega) = \frac{X(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)}, \quad G(\omega) = \frac{R(\omega)}{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$.

Если $R = 0$, то цепь становится чисто реактивной и ее проводимость

$$B(\omega) = \frac{1}{X(\omega)} = \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{\omega/L}{\omega/L} = \frac{\omega/L}{\omega^2 - \frac{1}{LC}} = \frac{\omega/L}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

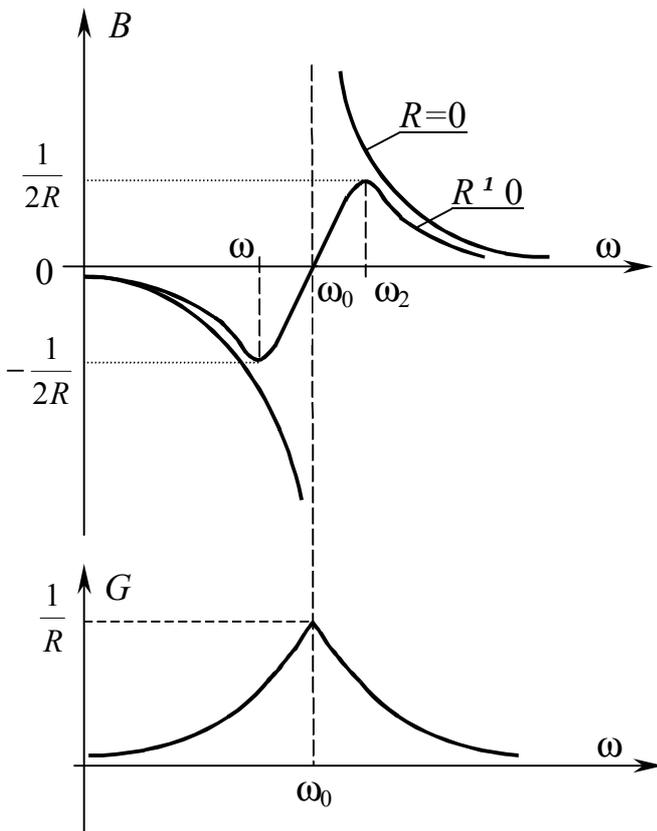


Рис. 4.5

Реактивная проводимость $B(\omega)$ (рис. 4.5) при $R=0$ имеет три характерные частоты – два нуля (при $\omega = 0$, $\omega = \infty$) и один полюс (при $\omega = \omega_0$). По характеру кривой $B(\omega)$ можно заметить, что с увеличением частоты B убывает:

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{X} \right) = -\frac{1}{X^2} \frac{dX}{d\omega} < 0;$$

так как $X^2 > 0$, то $dX/d\omega > 0$.

Частотные характеристики $I(\omega)$, $U_R(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ называют резонансными кривыми (рис. 4.6).

Пусть $U_{вх} = \text{const}$, тогда

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При $\omega = 0$ $I = 0$, так как конденсатор не пропускает постоянный ток. При $\omega = \infty$ $I = 0$, так как сопротивление катушки бесконечно большое. Максимум тока наблюдается при $\omega = \omega_0$, так как Z имеет минимальное значение, равное R .

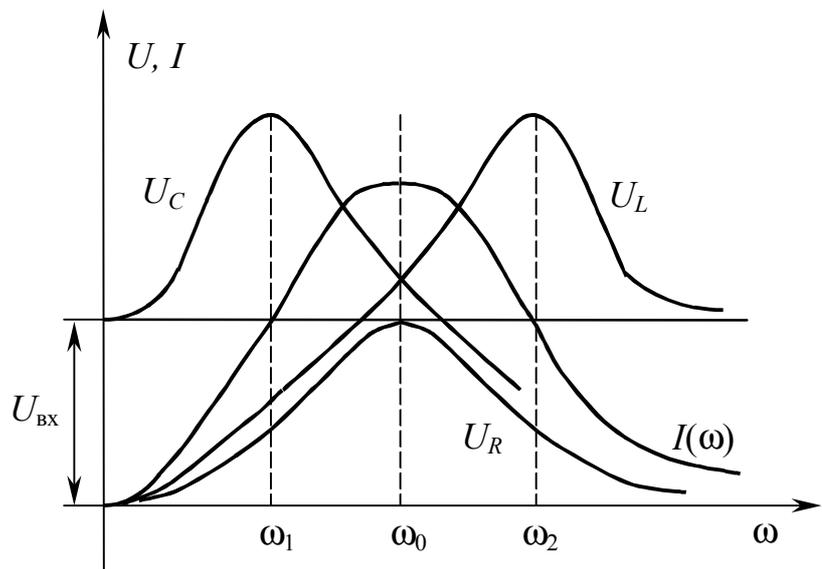


Рис. 4.6

Напряжение на активном сопротивлении R

$$U_R(\omega) = RI(\omega) = R \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

повторяет характеристику тока в масштабе напряжения.

Напряжение на емкости C

$$U_C(\omega) = X_C I(\omega) = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

При $\omega = 0$ все входное напряжение приложено к конденсатору, так как $X_C \rightarrow \infty$, тогда как при $\omega \rightarrow \infty$ $X_C \rightarrow 0$ и напряжение на конденсаторе стремится к нулю. Максимум U_C наступает при частоте, меньшей ω_0 , так как для получения U_C необходимо ток I умножить на убывающую величину $\frac{1}{\omega C}$.

Напряжение на индуктивности

$$U_L(\omega) = X_L I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \omega L.$$

Поведение характеристики $U_L(\omega)$ можно проанализировать аналогичным образом, что и поведение характеристики $U_C(\omega)$.

Экстремумы $U_L(\omega)$ и $U_C(\omega)$, так же как и экстремумы $B(\omega)$, наступают при

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \pm \frac{d}{2} \right],$$

причем $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 d$.

Для сопоставления качества резонансных цепей резонансные кривые тока строят в относительных координатах I/I_0 и $\omega/\omega_0 = \eta$ (рис. 4.7).

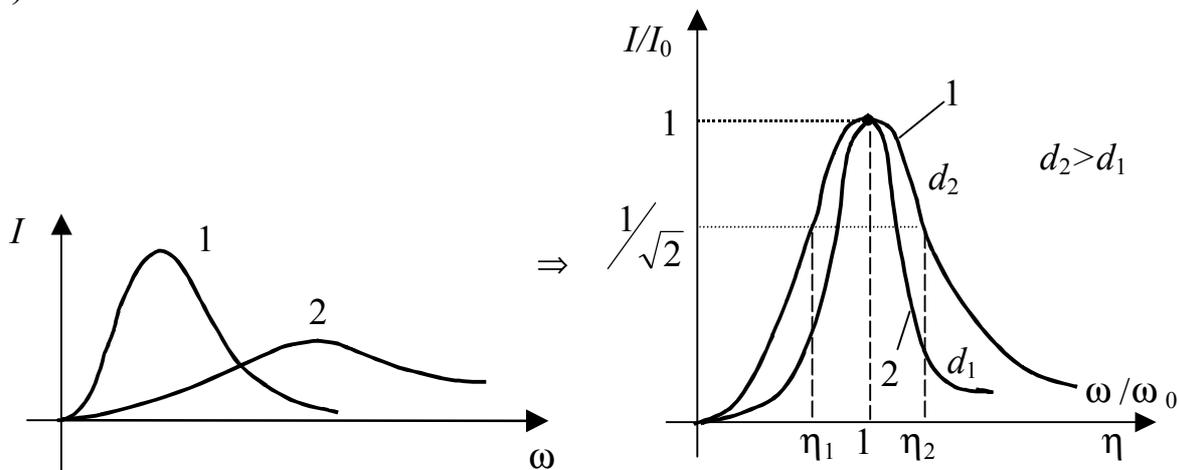


Рис. 4.7

$$\begin{aligned}
 \frac{I}{I_0} &= \frac{U}{Z} / \frac{U}{R} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega L - 1/\omega C}{R})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 L}{R} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}}. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Полоса пропускания – это диапазон частот, при которых относительный ток I/I_0 не меньше некоторой величины, называемой уровнем полосы пропускания. Пусть $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$ (рис. 4.7), тогда полосу пропускания можно определить как диапазон частот, при которых в цепи выделяется мощность не меньше половины максимальной, т.е. мощности в момент резонанса

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \Rightarrow \quad I^2 = \frac{I_0^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad I^2 R = \frac{I_0^2 R}{2}.$$

Полосу пропускания можно определить с помощью выражения (4.6), приравняв его к величине $1/\sqrt{2}$:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{d^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}}.$$

В этом случае слагаемое под корнем $\frac{1}{d^2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2$ должно быть равно

1, где $\frac{1}{d} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = a$ – так называемая *обобщенная расстройка*, равная ± 1 .

Из (4.6) следует, что

$$a = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

и, следовательно, $\varphi = \arctg a = \pm 45^\circ$. Таким образом, на границах полосы пропускания обобщенная расстройка равна ± 1 , а угол сдвига фаз составляет $\pm 45^\circ$.

4.2. Резонанс токов

Резонансом токов называют явление резонанса в участке электрической цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивный и емкостной элементы (ГОСТ Р52002-2003).

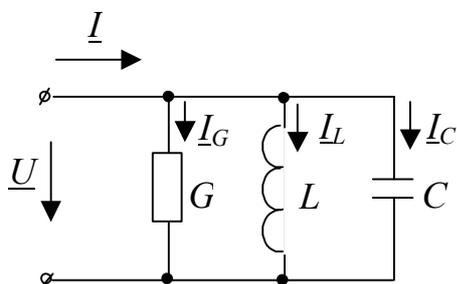


Рис. 4.8

Полная комплексная проводимость цепи, изображенной на рис. 4.8

$$\underline{Y} = G + jB = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y e^{\pm j\varphi},$$

где $Y = \sqrt{G^2 + B^2};$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \quad (4.7)$$

Условие (4.1) $\varphi = 0$ выполнимо, если в выражении (4.7)

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0,$$

или

$$\omega^2 LC = 1. \quad (4.8)$$

Таким образом, резонанса можно достичь изменением ω , L , C , так же, как и при резонансе напряжений (4.4).

Выполнение условия равенства индуктивной и емкостной проводимостей (4.8) означает, что токи в этих ветвях будут одинаковыми по модулю

$$|I_L| = |I_C|.$$

Для электрических цепей со смешанным соединением справедливо следующее условие возникновения резонанса токов:

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = 0. \quad (4.9)$$

Векторные диаграммы токов, построенные для дорезонансного, резонансного и послерезонансного режимов работы, представлены на рис. 4.9.

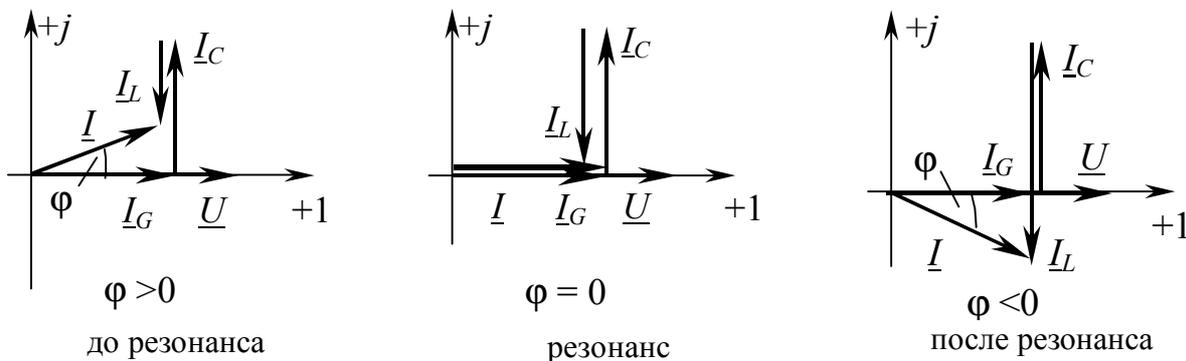


Рис. 4.9

Если при резонансе реактивная проводимость цепи равна нулю, то полная проводимость достигает минимального значения, равного активной проводимости. В режиме резонанса возможны случаи, когда токи в индуктивности и конденсаторе могут превосходить ток в неразветвленной части цепи. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов.

Волновая проводимость $\gamma = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}}.$

Добротность $Q = \frac{I_{C0}}{I} = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{U\omega_0 C}{UG} = \frac{B_C}{G} = \frac{B_L}{G}.$

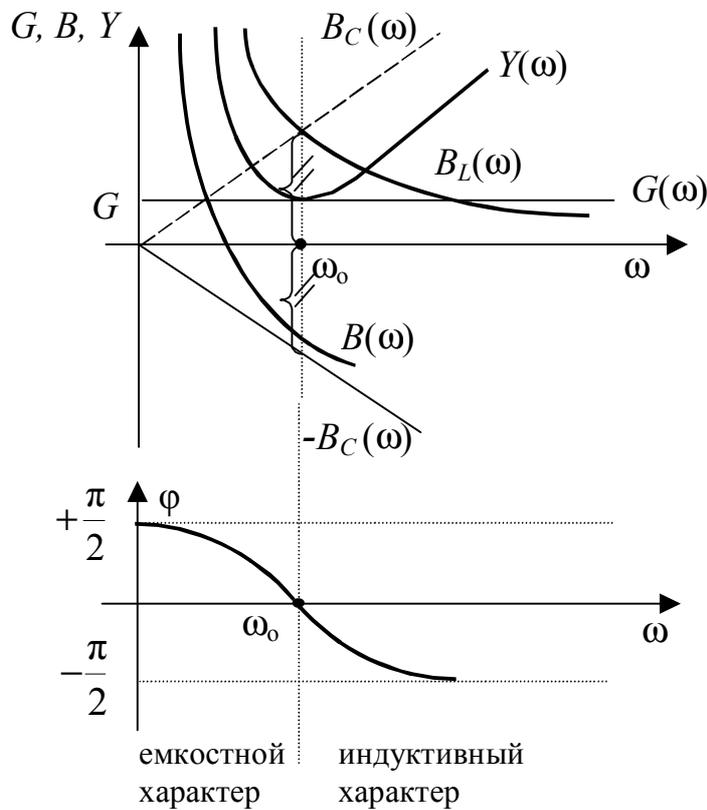


Рис. 4.10

Частотные характеристики

$$G(\omega) = G,$$

$$B_C(\omega) = \omega C,$$

$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L},$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\omega L} - \omega C,$$

$$Y(\omega) = \sqrt{G^2 + B^2},$$

$$\varphi = f(\omega)$$

приведены на рис. 4.10.

Частотные (резонансные) характеристики для случая, когда резонансный контур подключен к источнику тока, показаны на рис. 4.11.

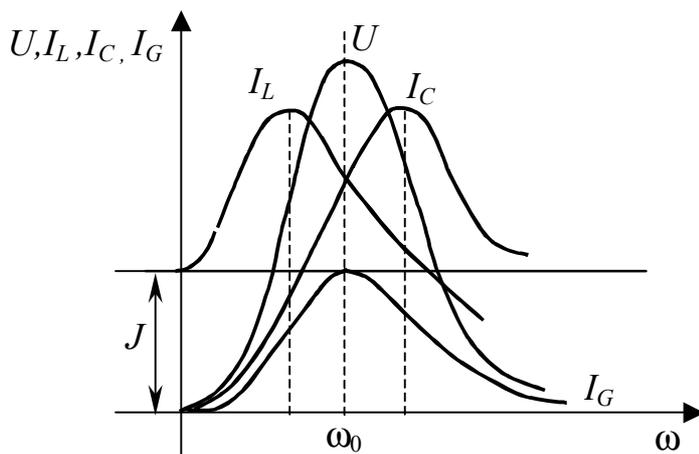


Рис. 4.11

Характер приведенных резонансных характеристик можно проанализировать, как это было сделано для резонанса в последовательной R, L, C цепи. Например, характер изменения напряжения можно проанализировать с помощью выражения

$$U(\omega) = I : \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2},$$

аналогичного выражению

для изменения тока при резонансе напряжений.

4.3. Резонанс в разветвленных цепях

В разветвленных цепях может иметь место как резонанс напряжений, так и резонанс токов

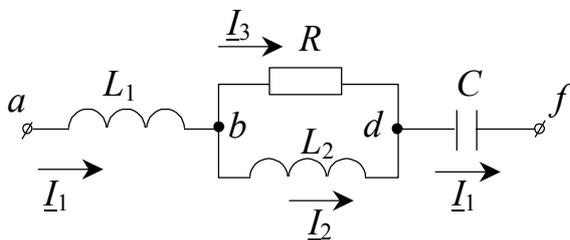
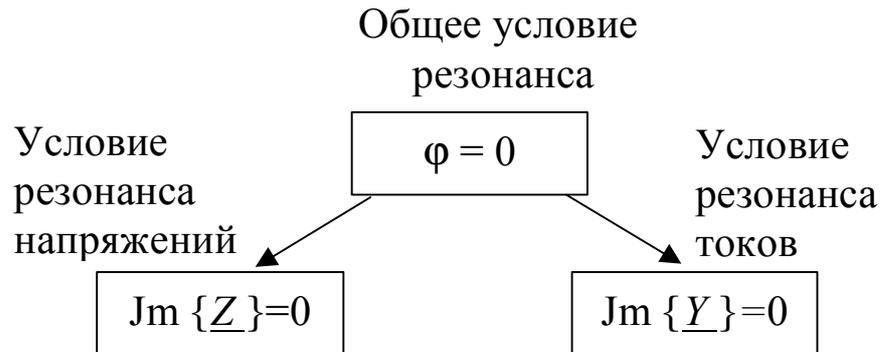


Рис. 4.12

Пример. При каких условиях возникает резонанс напряжений в цепи, представленной на рис. 4.12.

Решение:

Воспользуемся условием возникновения резонанса напряжений $\text{Im}\{Z\}=0$. Для этого запишем полное комплексное

сопротивление цепи и выделим его мнимую часть

$$\begin{aligned} Z &= j\omega L_1 + \frac{Rj\omega L_2}{R + j\omega L_2} - j\frac{1}{\omega C} = \\ &= j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C} + j\frac{R^2\omega L_2}{R^2 + (\omega L_2)^2} + \frac{R\omega^2 L_2^2}{R^2 + (\omega L_2)^2}, \\ \text{Im}\{Z\} &= \omega L_1 - \frac{1}{\omega C} + \frac{R^2\omega L_2}{R^2 + (\omega L_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего выражения можно определить резонансную частоту ω_0 или любой из параметров цепи L_{10} , L_{20} , C_0 , при которых наступает резонанс.

Векторные диаграммы для произвольного и резонансного режимов работы приведены на рис. 4.13.

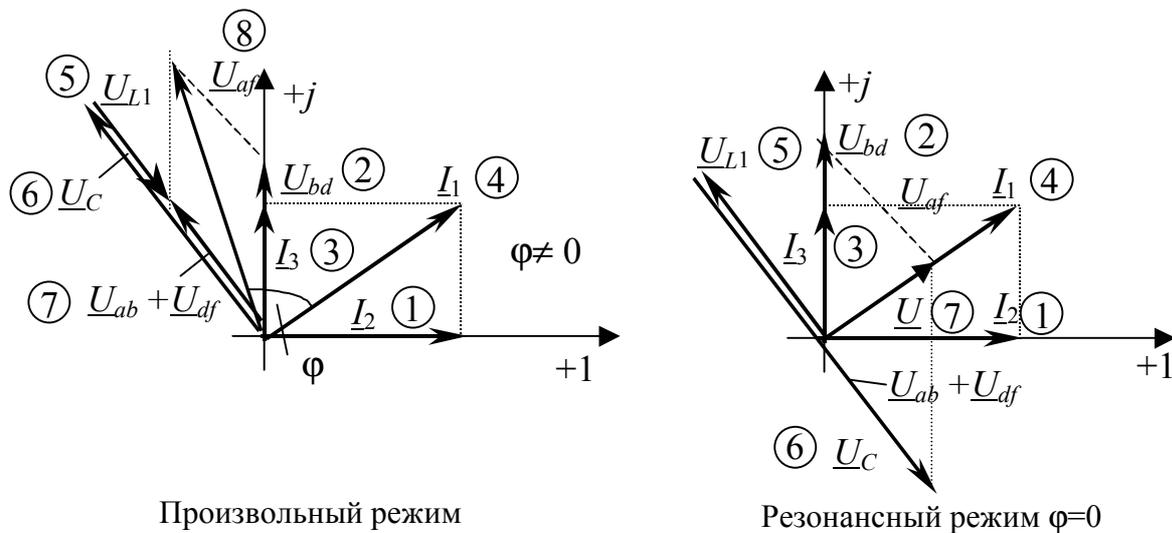


Рис. 4.13

В кружочках указана последовательность построения векторов.

4.4. Резонанс в цепях без потерь (чисто реактивные цепи)

Входное сопротивление при резонансе напряжений равно нулю, а при резонансе токов стремится к бесконечности. Учитывая, что входное сопротивление носит чисто мнимый характер, а также и теорему о реактивном двухполюснике, которая устанавливает, что $dX/d\omega > 0$, можно сделать следующие заключения:

- а) резонансы напряжений и резонансы токов чередуются;
- б) если в цепи имеется путь для постоянного тока, то первым наступит резонанс токов;
- в) общее число резонансов равно $N = m - 1 - p - y$, где m – число реактивных элементов; p – число параллельно или последовательно соединенных однотипных элементов; y – число узлов, все ветви которых имеют однотипные элементы.

Пример. Построить частотную характеристику для цепи, изображенной на рис. 4.14.

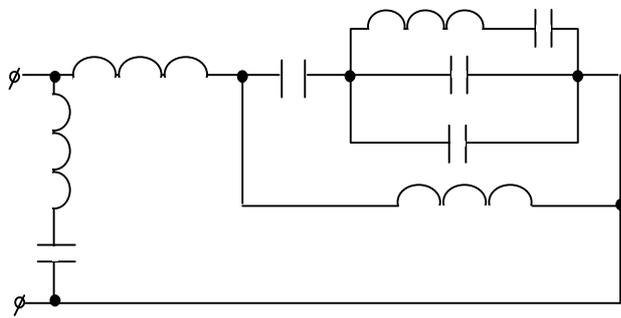


Рис. 4.14

Решение:

Подсчитаем общее количество резонансов.

$$N = 9 - 1 - 1 - 1 = 6.$$

Входное сопротивление двухполюсника при нулевой частоте, т. е. для случая постоянного тока, равно нулю.

$$Z(0) = 0.$$

Следовательно, в цепи имеется путь для постоянного тока и первым наступит резонанс токов.

Частотная характеристика приведена на рис. 4.15.

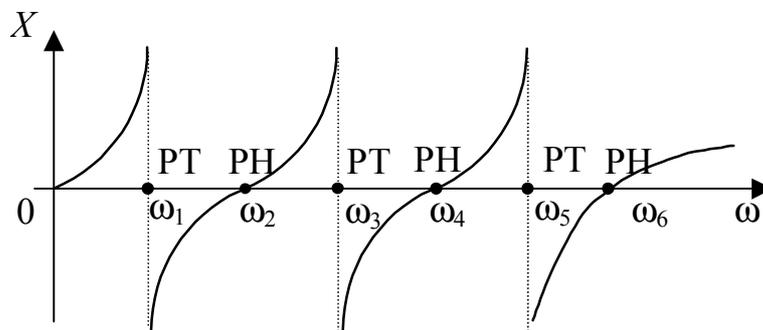


Рис. 4.15

Для случая, когда частота $\omega=0$, реактивное сопротивление двухполюсника равно 0. При ω_1 в цепи наблюдается резонанс токов, при ω_2 – резонанс напряжений, при ω_3 – резонанс токов, при ω_4 – резонанс напряжений, при ω_5 – резонанс токов, при ω_6 – резонанс напряжений. При бесконечно большой частоте реактивное сопротивление двухполюсника за счет ветвей с индуктивностями будет монотонно увеличиваться, стремясь к бесконечно большой величине.

Глава 5. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ В НИХ МАГНИТОСВЯЗАННЫХ КАТУШЕК

5.1. Определения. Физическая модель

Индуктивность (собственная индуктивность) – скалярная величина, равная отношению потокосцепления самоиндукции элемента электрической цепи к электрическому току в нем (ГОСТ Р52002-2003).

Взаимная индуктивность – скалярная величина, равная отношению потокосцепления взаимной индукции одного элемента электрической цепи к электрическому току в другом элементе, обуславливающему это потокосцепление (ГОСТ Р52002-2003).

Потокосцепление – сумма магнитных потоков, сцепленных с элементами контура электрической цепи (ГОСТ Р52002-2003).

Потокосцепление самоиндукции – потокосцепление элемента электрической цепи, обусловленное электрическим током в этом элементе (ГОСТ Р52002-2003).

Потокосцепление взаимной индукции – потокосцепление одного элемента электрической цепи, обусловленное электрическим током в другом элементе цепи (ГОСТ Р52002-2003).

Два контура (катушки) являются индуктивно связанными или магнитосвязанными, если магнитный поток, созданный током первого контура, пронизывает второй контур, а магнитный поток, вызванный током второго контура, пронизывает первый контур.

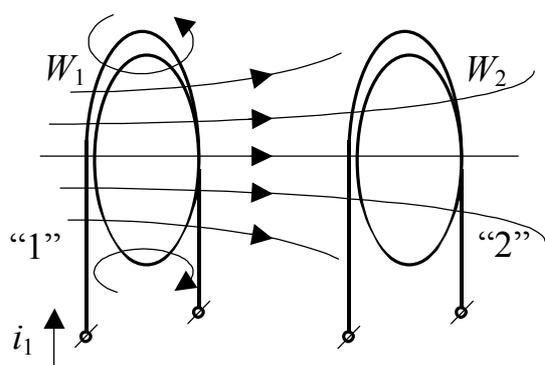


Рис. 5.1

На рис. 5.1 представлена схематическая картина магнитного поля при наличии тока в первой катушке. Витки первой катушки сцепляются с магнитным потоком самоиндукции Φ_{11} , а витки второй катушки – с магнитным потоком взаимной индукции Φ_{21} . Потокосцепление самоиндукции и взаимной индукции первой и второй катушек

$$\Psi_{11} = W_1 \Phi_{11},$$

$$\Psi_{21} = W_2 \Phi_{21}.$$

Тогда индуктивность первой катушки и взаимная индуктивность между катушками может быть определена как

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{W_1 \Phi_{11}}{i_1}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{W_2 \Phi_{21}}{i_1}.$$

Если предположить наличие тока только во второй катушке, то, проведя аналогичные рассуждения, можно получить

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{W_2 \Phi_{22}}{i_2}, \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{W_1 \Phi_{12}}{i_2}.$$

Для случая линейной среды справедливо $M_{12} = M_{21}$. Взаимная индуктивность, так же как и индуктивность, измеряется в генри [Гн]. Величина взаимной индуктивности зависит от геометрии (размеров, конфигурации, взаимного расположения катушек) и от свойств среды (магнитной проницаемости среды и провода).

В том случае, когда ток проходит как в первом контуре, так и во втором контуре (ветви, обмотке, катушке), полное потокосцепление представляется алгебраической суммой собственного и взаимного потокосцеплений:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2,$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1.$$

В случае изменения тока в одном из индуктивно связанных элементов в другом элементе возникает ЭДС взаимной индукции.

$$|u_{12}| = |e_{12}| = \left| \frac{d\Psi_{12}}{dt} \right| = \left| M_{12} \frac{di_2}{dt} \right|,$$

$$|u_{21}| = |e_{21}| = \left| \frac{d\Psi_{21}}{dt} \right| = \left| M_{21} \frac{di_1}{dt} \right|.$$

Знак перед напряжением, обусловленным явлением взаимной индукции, может быть определен только в случае маркировки одноименных зажимов катушек и определяется по следующему правилу: *если положительное направление тока в первой катушке принято от звездочки, то положительное направление напряжения взаимной индукции, возникающее в другой катушке, должно быть принято тоже от звездочки. Тогда, в случае составления уравнения по второму закону Кирхгофа, знак плюс присваивается напряжению взаимной индукции, если его направление совпадает с направлением обхода контура.*

5.2. Расчет последовательного соединения двух магнитосвязанных катушек

В случае последовательного соединения двух магнитосвязанных катушек возможно два вида включения: одноименными зажимами и разноименными зажимами, как это представлено, соответственно, на рис. 5.2 и рис. 5.3.

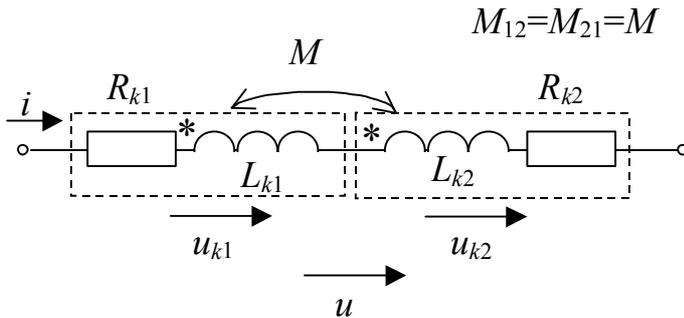


Рис. 5.2

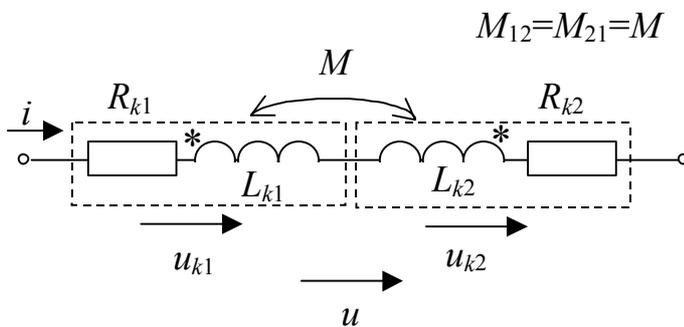


Рис. 5.3

Пользуясь правилом определения знака перед напряжением, обусловленным взаимной индукцией, запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для случая включения катушек одноименными зажимами

$$\underline{U} = R_{k1}\underline{I} + j\omega L_{k1}\underline{I} + j\omega M_{12}\underline{I} + R_{k2}\underline{I} + j\omega L_{k2}\underline{I} + j\omega M_{12}\underline{I}$$

и для случая включения катушек разноименными зажимами

$$\underline{U} = R_{k1}\underline{I} + j\omega L_{k1}\underline{I} - j\omega M_{12}\underline{I} + R_{k2}\underline{I} + j\omega L_{k2}\underline{I} - j\omega M_{12}\underline{I}$$

После упрощения эти уравнения принимаю вид:

$$\underline{U} = (R_{k1} + R_{k2})\underline{I} + j\omega(L_{k1} + L_{k2} + 2M)\underline{I},$$

$$\underline{U} = (R_{k1} + R_{k2})\underline{I} + j\omega(L_{k1} + L_{k2} - 2M)\underline{I}$$

или

$$\underline{U} = R_{\text{ЭКВ}}\underline{I} + j\omega L'_{\text{ЭКВ}}\underline{I},$$

$$\underline{U} = R_{\text{ЭКВ}}\underline{I} + j\omega L''_{\text{ЭКВ}}\underline{I},$$

где $R_{\text{ЭКВ}} = R_{k1} + R_{k2}$ – эквивалентное активное сопротивление; $L'_{\text{ЭКВ}} = L_{k1} + L_{k2} + 2M$ – эквивалентная индуктивность одноименного включения катушек; $L''_{\text{ЭКВ}} = L_{k1} + L_{k2} - 2M$ – эквивалентная индуктивность разноименного включения катушек.

Зная величины $L'_{\text{ЭКВ}}$ и $L''_{\text{ЭКВ}}$, можно определить коэффициент взаимной индуктивности M :

$$\begin{aligned}
 L'_{\text{ЭКВ}} &= L_1 + L_2 + 2M \\
 L''_{\text{ЭКВ}} &= L_1 + L_2 - 2M \\
 \hline
 L'_{\text{ЭКВ}} - L''_{\text{ЭКВ}} &= 4M, \\
 |M| &= \frac{L'_{\text{ЭКВ}} - L''_{\text{ЭКВ}}}{4}.
 \end{aligned}$$

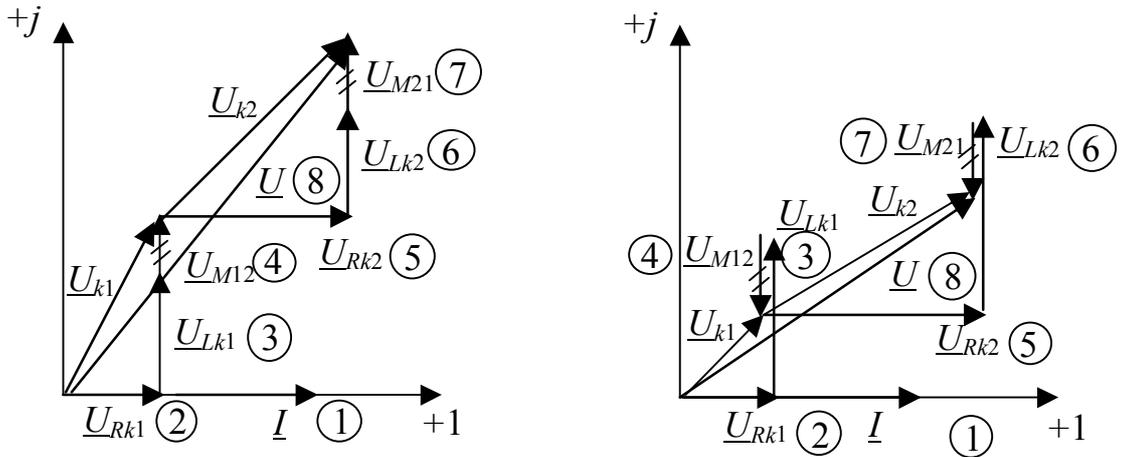


Рис. 5.4

Векторные диаграммы (рис. 5.4) для одноименного и разноименного включения катушек построены для одинакового значения тока в обоих случаях.

5.3. Расчет разветвленных цепей при наличии в них магнитосвязанных катушек

Задача расчета разветвленных электрических цепей при наличии в них магнитосвязанных катушек решается однозначно, если известны маркировка катушек и величина коэффициента взаимной индуктивности. Для расчета цепей применимы методы формирования уравнений по законам Кирхгофа и метод контурных токов, а также метод эквивалентного генератора, если отсутствует индуктивная связь между двухполюсником и выделенной ветвью. Нельзя применять без проведения специальных преобразований метод узловых потенциалов, формулы эквивалентного преобразования соединения треугольником в эквивалентное соединение звездой и обратно. При-

менение этих методов и формул требует введения дополнительных правил.

Запишем уравнения по законам Кирхгофа для цепи с магнитосвязанными катушками.

Пусть имеется электрическая схема (рис. 5.5), в которой присутствуют магнитосвязанные катушки.

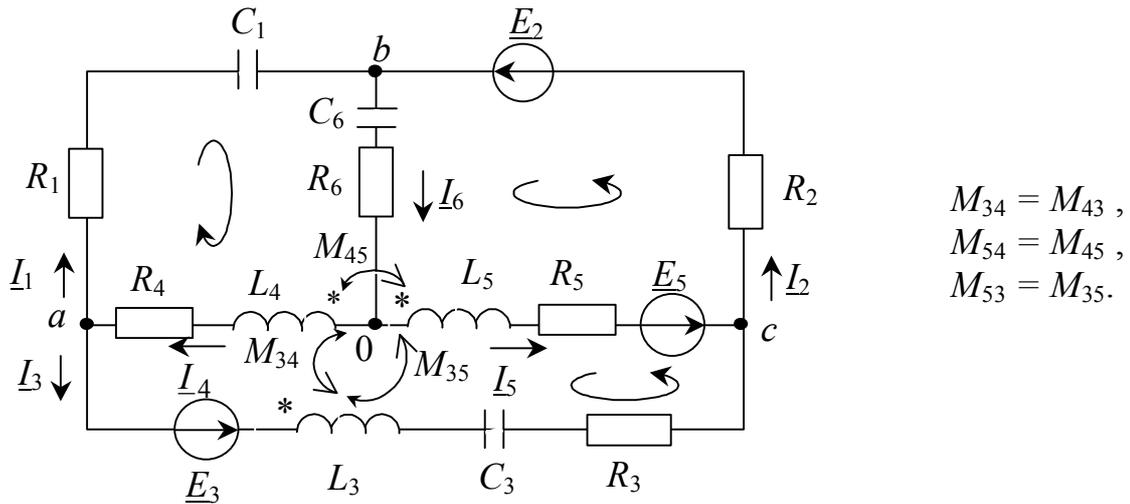


Рис. 5.5

По первому закону Кирхгофа запишем уравнения для узлов a , b , c .

$$\begin{aligned} \text{Узел } a \quad i_4 - i_1 - i_3 &= 0, \\ \text{узел } b \quad i_2 + i_1 - i_6 &= 0, \\ \text{узел } c \quad i_3 + i_5 - i_2 &= 0. \end{aligned}$$

Три уравнения по второму закону Кирхгофа запишем, считая, что конденсаторы не обладали начальным зарядом:

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + i_6 R_6 + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6 dt + i_4 R_4 + L_4 \frac{di_4}{dt} + M_{45} \frac{di_5}{dt} + M_{43} \frac{di_3}{dt} = 0,$$

$$i_6 R_6 + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6 dt + i_5 R_5 + L_5 \frac{di_5}{dt} + i_2 R_2 + M_{54} \frac{di_4}{dt} + M_{53} \frac{di_3}{dt} = e_5 + e_2,$$

$$\begin{aligned} i_4 R_4 + L_4 \frac{di_4}{dt} + i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt - i_5 R_5 - L_5 \frac{di_5}{dt} + M_{34} \frac{di_4}{dt} + \\ + M_{35} \frac{di_5}{dt} - M_{53} \frac{di_3}{dt} - M_{54} \frac{di_4}{dt} + M_{45} \frac{di_5}{dt} + M_{43} \frac{di_3}{dt} = e_3 - e_5. \end{aligned}$$

Эти же уравнения в комплексной форме могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_4 - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 &= 0, \\
 \underline{I}_2 + \underline{I}_1 - \underline{I}_6 &= 0, \\
 \underline{I}_3 + \underline{I}_5 - \underline{I}_2 &= 0, \\
 \underline{I}_1(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}) + \underline{I}_6(R_6 + \frac{1}{j\omega C_6}) + \underline{I}_4(R_4 + j\omega L_4) + \\
 &+ \underline{I}_5 j\omega M_{45} + \underline{I}_3 j\omega M_{43} = 0, \\
 \underline{I}_6(R_6 + \frac{1}{j\omega C_6}) + \underline{I}_5(R_5 + j\omega L_5) + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_4 j\omega M_{54} + \\
 &+ \underline{I}_3 j\omega M_{53} = \underline{E}_5 + \underline{E}_2, \\
 \underline{I}_4(R_4 + j\omega L_4) + \underline{I}_3(R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}) - \underline{I}_5(R_5 + j\omega L_5) - \underline{I}_4 j\omega M_{34} - \\
 - \underline{I}_5 j\omega M_{35} - \underline{I}_3 j\omega M_{53} + \underline{I}_4 j\omega M_{54} + \underline{I}_5 j\omega M_{45} + \underline{I}_3 j\omega M_{43} &= \underline{E}_3 - \underline{E}_5.
 \end{aligned}$$

Знак напряжения, обусловленного взаимной индукцией, определяется по приведенному выше правилу.

Учет взаимной индукции в случае составления уравнений по методу контурных токов осуществляется в виде введения дополнительных членов в выражения для собственных и взаимных сопротивлений контуров. При этом общий вид системы уравнений остается без изменений. Так, для приведенной выше схемы необходимо записать систему из трех уравнений:

$$\begin{cases}
 \underline{Z}_{11}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{11}, \\
 \underline{Z}_{21}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{33}, \\
 \underline{Z}_{31}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{32}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{33}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{33},
 \end{cases}$$

где, например,

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_6} + R_6 + R_4 + j\omega L_4 + j\omega M_{45} + j\omega M_{43},$$

а $j\omega M_{45}$ и $j\omega M_{43}$ – сопротивления, обусловленные явлением взаимной индукции, причем их знак определяется аналогично приведенному выше правилу.

5.4. «Развязывание» магнитосвязанных цепей

Невозможность непосредственного использования эффективных методов расчета, таких как, например, метода узловых потенциалов, приводит к необходимости осуществления так называемой развязки магнитосвязанных цепей.

Суть: исходную схему с магнитосвязанными индуктивностями путем введения дополнительных индуктивностей и изменения имеющихся преобразуют так, чтобы устранить магнитную связь между индуктивностями.

Преобразования осуществляют на основе составленных по законам Кирхгофа уравнений для исходной схемы. Вновь

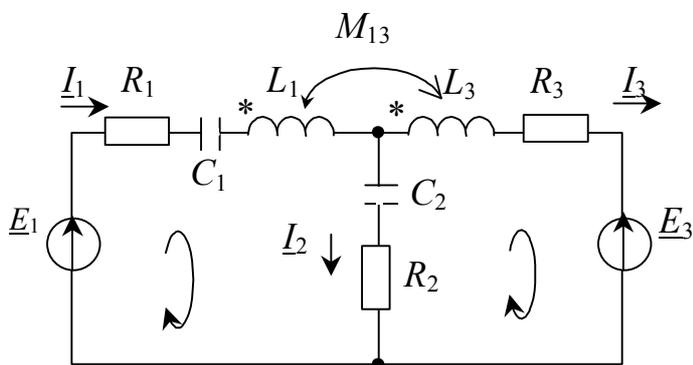


Рис. 5.6

полученная и исходная схема в расчетном смысле должны быть полностью эквивалентны.

Составим уравнения по законам Кирхгофа для схемы, приведенной на рис. 5.6

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \\ \underline{I}_1 \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \underline{I}_2 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 j\omega M_{13} = \underline{E}_1, & (5.1) \\ \underline{I}_1 j\omega M_{31} - \underline{I}_2 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 (R_3 + j\omega L_3) = -\underline{E}_3. & (5.2) \end{cases}$$

Подставив в уравнение (5.1) $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$, а в уравнение (5.2) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, запишем:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \left[R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega(L_1 + M_{13}) \right] + \underline{I}_2 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} - j\omega M_{13} \right) = \underline{E}_1, \\ -\underline{I}_2 \left(R_2 - j\omega M_{31} + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 [R_3 + j\omega(L_3 + M_{31})] = -\underline{E}_3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Полученная система уравнений (5.3) позволяет построить схему электрической цепи (рис. 5.7), в которой магнитосвязанные индуктивности L_1 и L_3 заменены соответственно индуктивностями (L_1+M) и (L_3+M) и, кроме того, введена дополнительная индуктивность $L_2=-M$.

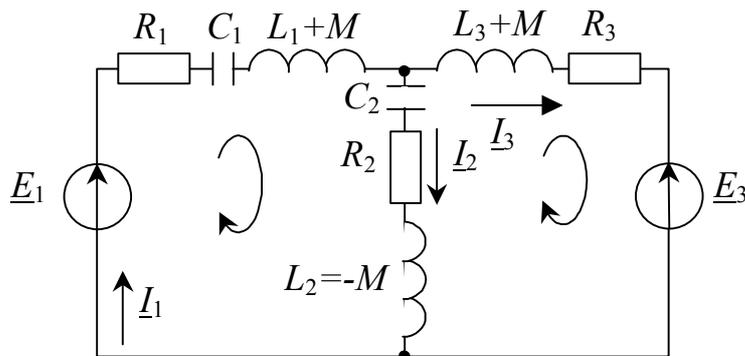


Рис. 5.7

В реальной линейной электрической цепи обеспечить отрицательную индуктивность невозможно, поэтому $L_2 = -M$ является только расчетной величиной.

В отличие от исходной в полученной схеме магнитная связь заменена гальванической. А это означает, что расчет такой схемы может быть осуществлен любым известным методом.

5.5. Трансформатор с линейными характеристиками

Трансформатор – статическое электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанных обмоток и предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции одной или нескольких систем переменного тока в одну или несколько других систем переменного тока (ГОСТ Р52002-2003).

Основные назначения:

- а) преобразование значений напряжения (тока);
- б) согласование по сопротивлению;
- в) гальваническая развязка.

В простейшем случае трансформатор состоит из двух электрически не связанных, неподвижных относительно друг друга катушек, расположенных, как правило, на ферромагнитном сердечнике. Если в качестве сердечника используется не ферромагнитный материал, то

электрическое состояние такого трансформатора описывается линейными уравнениями. Такой трансформатор носит название линейного.

Рассмотрим линейный трансформатор, схема замещения которого представлена на рис. 5.8.

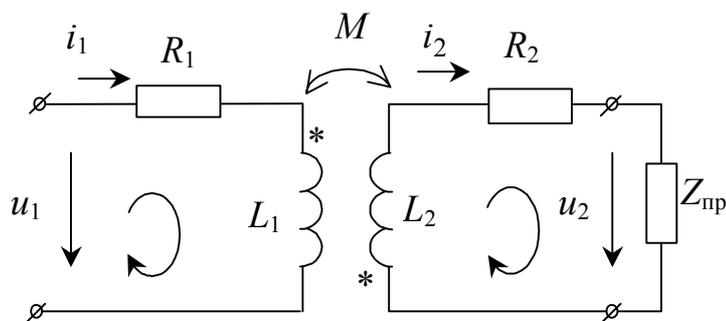


Рис. 5.8

Система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений такого трансформатора, записанная по второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепи с учетом взаимной индукции, имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2 + M \frac{di_1}{dt}. \end{cases}$$

Если приложенное напряжение u_1 изменяется по синусоидальному закону, то в установившемся режиме синусоидальными функциями времени будут токи i_1 и i_2 и напряжение на вторичной обмотке u_2 . Тогда уравнение трансформатора можно записать в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ -j\omega M \underline{I}_1 = \underline{I}_2 R_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Если известно приложенное напряжение \underline{U}_1 , параметры трансформатора и приемника $\underline{Z}_{пр}$, то, решая последнюю систему, можно найти токи в первичной и вторичной обмотках.

Предположим, что при заданном приложенном напряжении \underline{U}_1 требуется найти ток в первичной обмотке \underline{I}_1 . Параметры приемника и обмоток трансформатора считаем известными $\underline{Z}_{пр} = R_{пр} + jX_{пр}$.

Обозначим:

- реактивное сопротивление первого контура $X_I = \omega L_1$,
- реактивное сопротивление второго контура $X_{II} = \omega L_2 + X_{пр}$,

– активное сопротивление второго контура $R_{II} = R_2 + R_{пр}$,
тогда система уравнений (5.4) примет вид

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ -j\omega M \underline{I}_1 = (R_{II} + jX_{II})\underline{I}_2, \end{cases}$$

откуда
$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II} + jX_{II}} \underline{I}_1, \quad (5.5)$$

где
$$\underline{I}_2 = -j \frac{\omega M}{R_{II} + jX_{II}} \underline{I}_1.$$

Следовательно, искомый ток \underline{I}_1 можно найти из выражения (5.5):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{(R_1 + jX_1) + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II} + jX_{II}}}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим отдельно знаменатель выражения (5.6):

$$\begin{aligned} (R_1 + jX_1) + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II} + jX_{II}} &= \frac{(R_1 + jX_1)(R_{II} + jX_{II}) + \omega^2 M^2}{R_{II} + jX_{II}} = \\ &= \frac{(R_1 + jX_1)(R_{II}^2 + X_{II}^2) + \omega^2 M^2(R_{II} - jX_{II})}{R_{II}^2 + X_{II}^2} = \\ &= \frac{R_1 R_{II}^2 + jX_1 R_{II}^2 + R_1 X_{II}^2 + jX_1 X_{II}^2 + \omega^2 M^2 R_{II} - j\omega^2 M^2 X_{II}}{R_{II}^2 + X_{II}^2} = \\ &= \frac{R_1(R_{II}^2 + X_{II}^2) + \omega^2 M^2 R_{II} + j(X_1(R_{II}^2 + X_{II}^2) - \omega^2 M^2 X_{II})}{R_{II}^2 + X_{II}^2} = \\ &= R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} R_{II} + j(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} X_{II}), \end{aligned}$$

следовательно, выражение (5.6) можно переписать

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} R_{II}) + j(X_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_{II}^2 + X_{II}^2} X_{II})} = \\ &= \frac{\underline{U}_1}{R_{\text{ЭКВ}} + jX_{\text{ЭКВ}}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{ВХ}}}, \end{aligned}$$

где $\underline{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{экв}} + jX_{\text{экв}}$ – комплексное входное сопротивление всей цепи, состоящей из трансформатора и приемника.

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления можно представить в виде

$$R_{\text{экв}} = R_1 + \Delta R,$$

$$X_{\text{экв}} = X_1 + \Delta X,$$

где

$$\Delta R = \frac{\omega^2 M^2}{R_{\text{II}}^2 + X_{\text{II}}^2} R_{\text{II}}, \quad \Delta X = -\frac{\omega^2 M^2}{R_{\text{II}}^2 + X_{\text{II}}^2} X_{\text{II}}, \quad (5.7)$$

вносимые, соответственно, активное и реактивное сопротивления. Вносимые сопротивления представляют собой такие сопротивления, которые следовало бы «внести» в первичную цепь (включить последовательно с R_1 и X_1), чтобы учесть влияние нагрузки и вторичной цепи трансформатора на ток в его первичной цепи.

Для анализа работы трансформатора часто используют его схему замещения без магнитной связи. Получим схему замещения трансформатора, используя для этого “развязку” магнитосвязанных первичной и вторичной обмоток. Воспользуемся системой уравнений трансформатора (5.4). Прибавив и вычтя из первого уравнения $j\omega M I_1$, а из второго $j\omega M I_2$, получим:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 R_1 + j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$0 = \underline{I}_2 R_2 + j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 + j\omega M(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{I}_2 \underline{Z}_{\text{пр}}.$$

По приведенной системе уравнений можно составить электрическую схему замещения трансформатора (рис. 5.9), где вместо магнитосвязанных ветвей присутствуют только гальванически связанные ветви

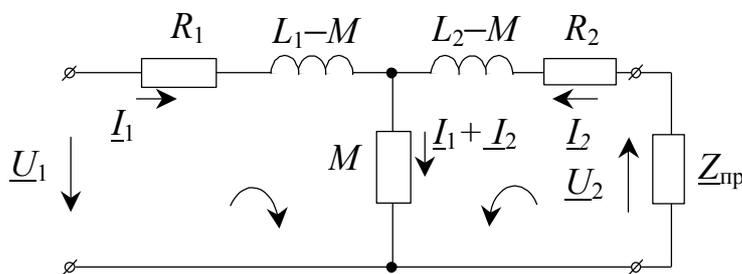


Рис. 5.9

Степень магнитной связи контуров характеризуется коэффициентом связи k , под которым понимают отношение

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Определим пределы изменения коэффициента связи. Пусть для трансформатора справедливо $R_2 = 0$ и $Z_{пр} = 0$, тогда в выражении (5.7)

$$R_{11} = 0, \quad X_{11} = \omega L_2, \quad \text{а} \quad \Delta X = -\omega \frac{M^2}{L_2}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$X_{\text{экв}} = X_1 + \Delta X = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L_2} = \omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = \omega L_1 (1 - k^2) = \omega L_{\text{экв}}.$$

Если $L_{\text{экв}} > 0$, в силу условия $W_M = \frac{1}{2} LI^2 > 0$ множитель $1 - k^2$ не может быть отрицательным. Тогда $k \leq 1$. Очевидно, если катушки разнесены на значительное расстояние, то $k = 0$. Если поток взаимной индукции и поток самоиндукции в первичной ветви взаимно компенсируются, то $k = 1$. Таким образом, коэффициент связи находится в пределах $0 \leq k \leq 1$.

Рассматривая различные соотношения параметров реального трансформатора, можно выделить некоторые идеализированные случаи:

1) совершенный трансформатор

$$R_1 = R_2 = 0; \quad k = 1; \quad U_1 / U_2 = c \quad \text{при любой нагрузке;}$$

2) идеальный трансформатор

$$R_1 = R_2 = 0; \quad k = 1; \quad L_1 = \infty; \quad U_1 = c U_2; \quad I_1 = (1/c) I_2.$$

Такой трансформатор обладает свойством изменять токи и напряжения независимо от значения сопротивления, включенного во вторичной цепи, в определенное число раз

$$\frac{U_1}{I_1} = Z_{\text{вх}} = \frac{c U_2}{\frac{1}{c} I_2} = c^2 Z_{\text{пр}},$$

откуда видно, что при помощи идеального трансформатора можно произвести и изменение сопротивления в определенное число раз. Это обстоятельство важно для осуществления согласования отдельных участков цепей или электрических блоков по их сопротивлениям. Свойствами, близкими к свойствам идеального и совершенного трансформаторов, обладают трансформаторы на ферромагнитных сердечниках, с большой величиной магнитной проницаемости и большим числом витков.

ГЛАВА 6. РАСЧЁТ ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

Многофазной системой электрических цепей называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе, создаваемые общими источником энергии (ГОСТ Р52002-2003)

Многофазной цепью называют многофазную систему электрических цепей, в которой отдельные фазы электрически соединены друг с другом (ГОСТ Р52002-2003). В частности, при числе фаз многофазной системы, равной трем, будем иметь трехфазную цепь.

Различают симметричную и несимметричную многофазную цепь.

Многофазная электрическая цепь, в которой комплексные электрические сопротивления составляющих ее фаз одинаковы, называют симметричной многофазной электрической цепью (ГОСТ Р52002-2003).

6.1. Трехфазная система ЭДС

Под трёхфазной симметричной системой ЭДС понимают совокупность трех синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутых по фазе относительно друг друга на 120° (рис. 6.1).

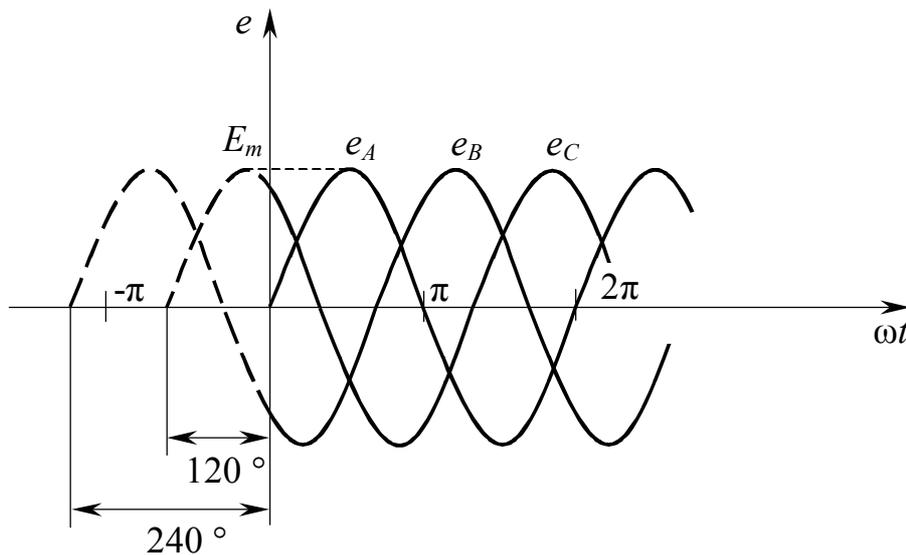


Рис. 6.1

$$e_A = E_m \sin \omega t ,$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) ,$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) .$$

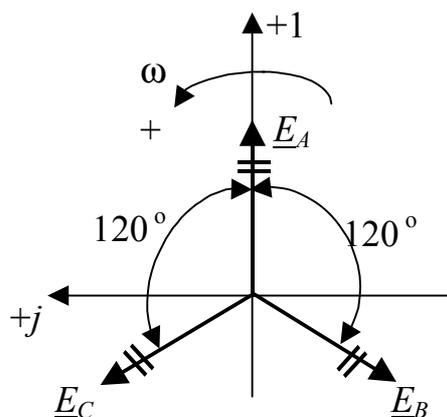


Рис. 6.2

Соответственно, для действующих ЭДС в комплексной форме можно записать

$$\underline{E}_A = E ,$$

$$\underline{E}_B = E e^{-j120^\circ} ,$$

$$\underline{E}_C = E e^{-j240^\circ}$$

и изобразить на комплексной плоскости (рис. 6.2).

6.2. Общие положения и допущения при расчете трехфазных цепей

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и поэтому их расчет производится теми же методами и приемами, которые присущи цепям однофазного синусоидального тока. Для анализа трехфазных цепей применим комплексный (символический) метод расчета, могут строиться векторные и топографические диаграммы.

Для анализа трехфазных цепей введем два допущения:

- 1) система ЭДС трехфазного генератора симметрична;
- 2) все источники ЭДС имеют бесконечно большую мощность.

Эти допущения сводятся к тому, что синусоидальные напряжения на зажимах трехфазного генератора симметричны при любой нагрузке.

6.3. Расчет соединения звезда–звезда с нулевым проводом

Предположим сейчас и будем считать в дальнейшем, что сопротивление проводов, соединяющих источник с нагрузкой, равно нулю. В этом случае в соединении звезда-звезда с нулевым проводом обра-

зуются три обособленных контура (рис. 6.3). Токи в этих контурах можно определить по закону Ома

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_a}, \quad \underline{I}_B = \underline{I}_b = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_b}, \quad \underline{I}_C = \underline{I}_c = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_c},$$

где \underline{I}_A , \underline{I}_B и \underline{I}_C – линейные токи источника, а \underline{I}_a , \underline{I}_b и \underline{I}_c – фазные токи нагрузки, соответственно, фазы a , b , c .

Ток в нулевом проводе равен $\underline{I}_0 = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$. Напряжение между линейным проводом и нулевым узлом \underline{U}_Φ – фазное напряжение: \underline{U}_a , \underline{U}_b и \underline{U}_c . Напряжение между линейными проводами \underline{U}_Δ – линейное напряжение: \underline{U}_{ab} , \underline{U}_{bc} и \underline{U}_{ca} .

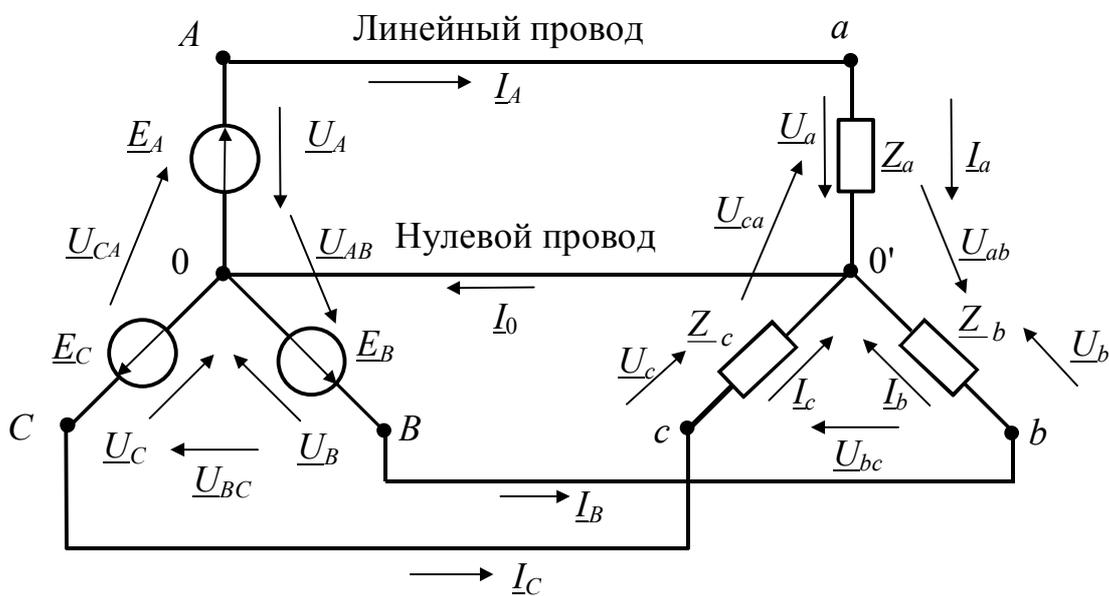


Рис. 6.3

При соединении звезда–звезда с нулевым проводом справедливы следующие равенства:

для токов: $\underline{I}_A = \underline{I}_a$, $\underline{I}_B = \underline{I}_b$ и $\underline{I}_C = \underline{I}_c$;

для напряжений: $\underline{U}_A = \underline{U}_a$, $\underline{U}_B = \underline{U}_b$, $\underline{U}_C = \underline{U}_c$ и

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}, \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc}, \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca}.$$

Между модулями фазных и линейных токов и напряжений справедливы следующие соотношения: $I_\Phi = I_\Delta$; $U_\Delta = \sqrt{3} U_\Phi$.

Рассмотрим два случая: случай симметричной нагрузки и случай несимметричной нагрузки.

6.3.1. Симметричная нагрузка (цепь)

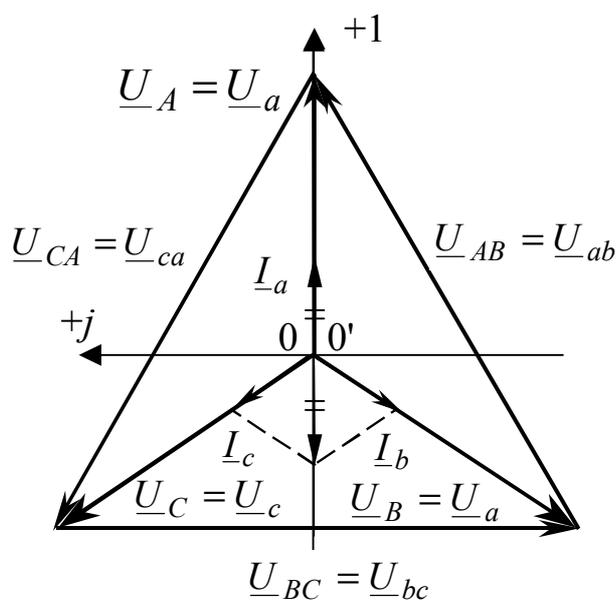


Рис. 6.4

Симметричная многофазная (трёхфазная) цепь – это цепь, в которой комплексные сопротивления составляющих её фаз одинаковы (ГОСТ Р52002-2003). На рис. 6.4 представлена векторная диаграмма напряжений на источнике и нагрузке. Векторная диаграмма токов построена для симметричной цепи, имеющей активный характер. При этом

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$$

и, следовательно, нулевой провод может быть устранён из цепи без изменения режима её работы.

Аналогичная ситуация наблюдается и для симметричной цепи с активно-реактивной нагрузкой, когда $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$.

6.3.2. Несимметричная нагрузка (цепь)

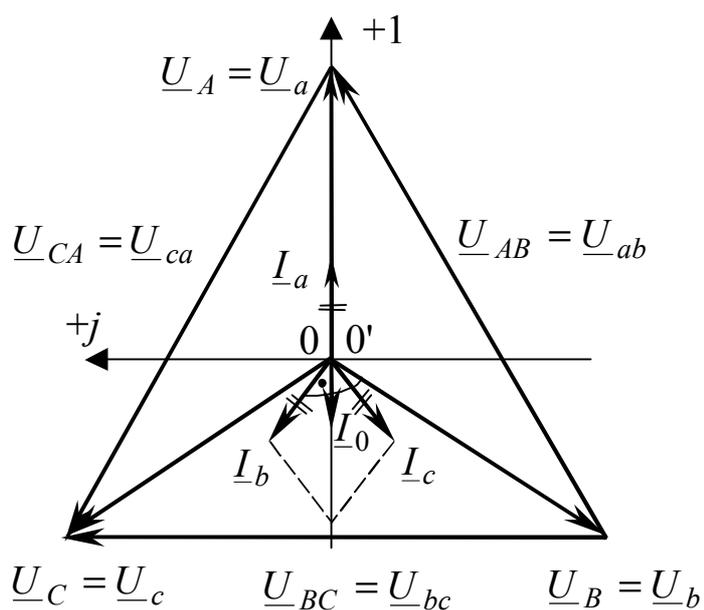


Рис. 6.5

Если нагрузка несимметрична, т. е. $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$, то появляется ток в нулевом проводе:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c,$$

как это, например, показано на векторной диаграмме (рис. 6.5). Сопротивления фаз равны по величине, но имеют различный характер: в фазе a – активная нагрузка, в фазе b – индуктивная нагрузка, а в фазе c – емкостная нагрузка.

6.4. Расчет соединения звезда–звезда без нулевого провода

6.4.1. Симметричная нагрузка (цепь)

В случае симметричной цепи расчет токов в фазах нагрузки сводится к расчету соединения звезда-звезда с нулевым проводом, как это было показано в пункте 6.3:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c}.$$

6.4.2. Несимметричная нагрузка (цепь)

В случае несимметричной цепи напряжение на фазе нагрузки не равно соответствующему напряжению источника. Для определения искомого тока $\underline{I}_A = \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a}$, $\underline{I}_B = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b}$ и $\underline{I}_C = \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c}$ необходимо отыскать фазное напряжение на нагрузке.

Для этого следует записать уравнение по второму закону Кирхгофа для контуров, образованных источником ЭДС, сопротивлением нагрузки и напряжением холостого хода между узлами 0'0 (рис. 6.6)

$$\underline{U}_a + \underline{U}_{0'0} - \underline{U}_A = 0, \quad \text{откуда} \quad \underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{0'0}.$$

Определение \underline{U}_a в последнем выражении возможно в случае, когда известно $\underline{U}_{0'0}$ – напряжение смещения нейтрали.

Напряжение смещения нейтрали можно определить по методу двух узлов, представляя $\underline{U}_{0'0} = \underline{\varphi}_{0'} - \underline{\varphi}_0$ или $\underline{U}_{0'0} = \underline{\varphi}'_0$ при условии, что потенциал узла 0 принят равным нулю, тогда

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{\varphi}'_0 = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_a + \underline{E}_B \underline{Y}_b + \underline{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Если по условию проектирования нулевой провод обладает некоторой проводимостью, то последнее выражение можно переписать в виде

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{\Phi}_{0'} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_a + \underline{E}_B \underline{Y}_a + \underline{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_0}.$$

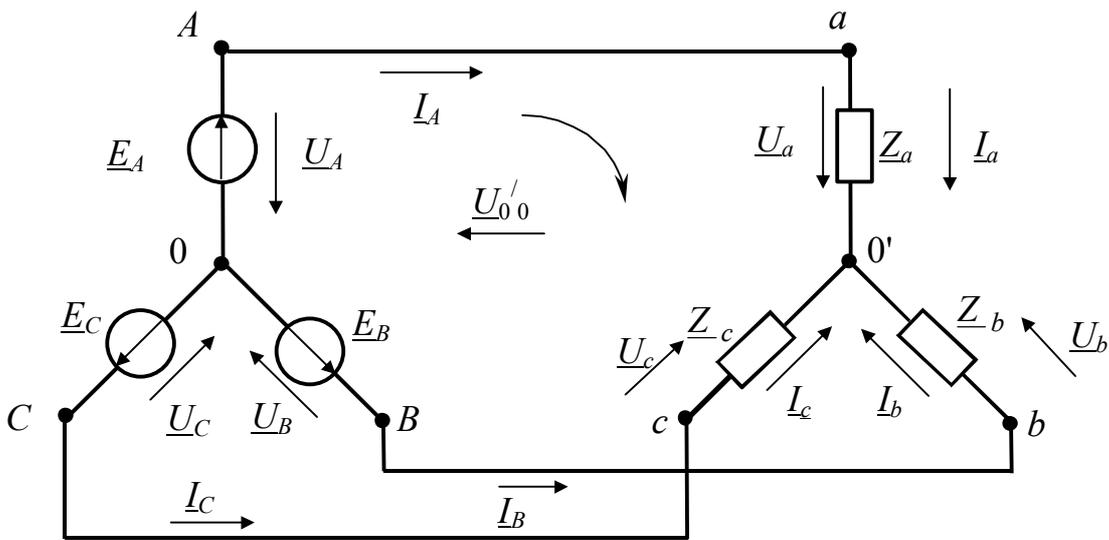


Рис. 6.6

При этом расчете было предположено, что сопротивления фазных обмоток генератора и сопротивления линейных проводов равны нулю. Если такие условия не соблюдаются, то эти сопротивления могут быть учтены путем их введения в сопротивления соответствующих фаз \underline{Z}_a , \underline{Z}_b и \underline{Z}_c . При отсутствии сопротивлений обмоток генератора их ЭДС равны фазным напряжениям на его зажимах $\underline{E}_A = \underline{U}_A$,

$\underline{E}_B = \underline{U}_B$, $\underline{E}_C = \underline{U}_C$ и тогда полученную формулу для определения смещения нейтрали можно записать для напряжений:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_a + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_0}.$$

Напряжение $\underline{U}_{0'0}$ называют напряжением смещения нейтрали.

Векторная диаграмма для соединения звезда-звезда без нулевого провода представлена на рис. 6.7.

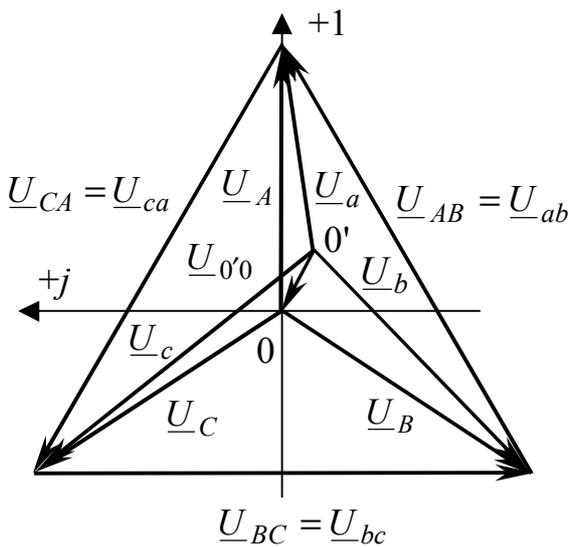


Рис. 6.7

6.5. Расчет соединения треугольник–треугольник

Пусть сопротивление фазных обмоток генератора и сопротивление линейных проводов равны нулю (рис. 6.8), тогда $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}$, $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc}$, $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca}$.

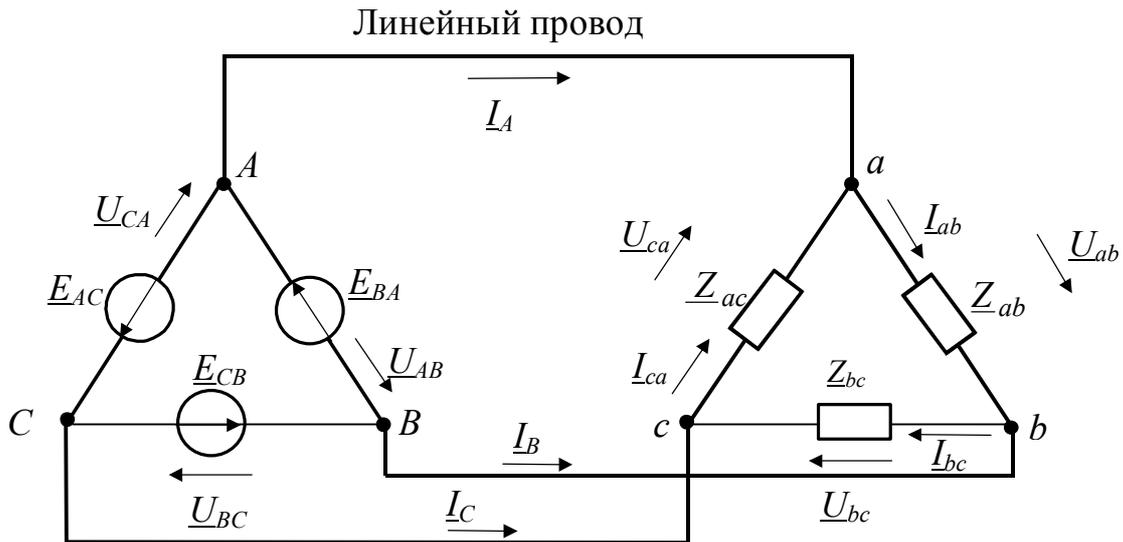


Рис. 6.8

Ток в фазах нагрузки – фазный ток:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{U}_{AC}}{\underline{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи в общем случае, т. е. для несимметричной нагрузки, можно определить по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

Для симметричной цепи линейные токи в $\sqrt{3}$ раз больше фазных токов.

6.6. Активная, реактивная и полная мощности трёхфазной цепи

Под активной и реактивной мощностями трехфазной цепи понимают $P = P_a + P_b + P_c + P_0$ и $Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_0$. Полная мощность $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Если нагрузка симметричная, то $P_0 = Q_0 = 0$,

$$P_a = P_b = P_c = U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi,$$

$$Q_a = Q_b = Q_c = U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi,$$

и тогда мощность трёхфазной цепи может быть рассчитана через фазные токи и напряжения:

$$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi,$$

$$Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi,$$

$$S = 3U_{\Phi} I_{\Phi}.$$

Активная, реактивная, полная мощности трехфазной цепи независимо от способа её соединения в звезду или треугольник могут быть найдены через линейные токи и напряжения:

$$S = 3U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{3} \sqrt{3} U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}},$$

$$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos \varphi,$$

$$Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \sin \varphi.$$

6.7. Измерение активной мощности в трёхфазной цепи

Метод трёх ваттметров используют для измерения активной мощности трёхфазной цепи в случае несимметричной нагрузки. Активная мощность всей цепи равна сумме показаний всех ваттметров.

При симметричной нагрузке достаточно измерить мощность одной из фаз и результат утроить – метод одного ваттметра.

Схема измерения активной мощности трёхфазной цепи для несимметричной нагрузки показана на рис. 6.9.

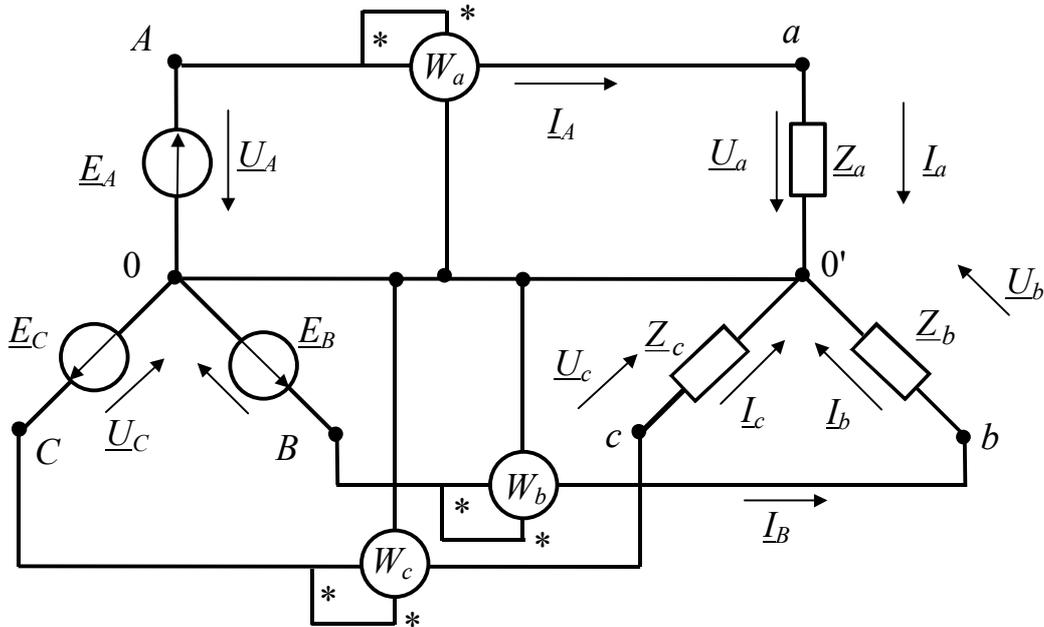


Рис. 6.9

В случае, если узел 0' недоступен, то измерение мощности можно произвести двумя ваттметрами (рис. 6.10)

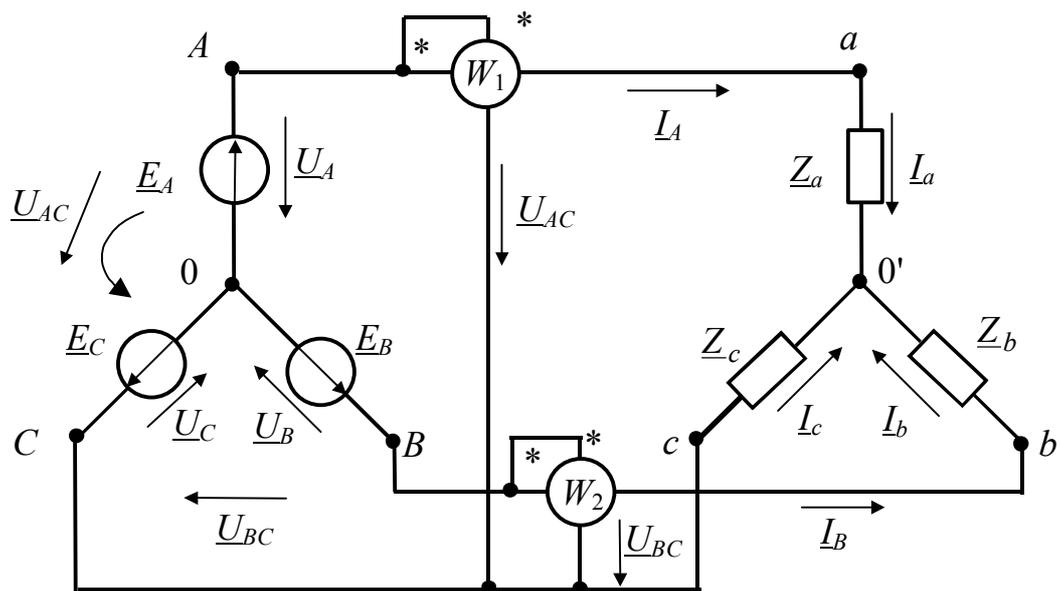


Рис. 6.10

Докажем, что сумма показаний двух ваттметров представляет собой активную мощность трехфазной цепи

$$pW_1 \Rightarrow \operatorname{Re}\{\underline{U}_{AC}\underline{I}_A^*\} \text{ и}$$

$$pW_2 \Rightarrow \operatorname{Re}\{\underline{U}_{BC}\underline{I}_B^*\}.$$

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, образованного фазными напряжениями U_A и U_C и линейным напряжением U_{AC}

$$\underline{U}_{AC} + \underline{U}_C - \underline{U}_A = 0,$$

откуда

$$\underline{U}_{AC} = \underline{U}_A - \underline{U}_C;$$

аналогично

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C.$$

Определим полную комплексную мощность.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AC}\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\underline{I}_B^* &= (\underline{U}_A - \underline{U}_C)\underline{I}_A^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C)\underline{I}_B^* = \\ &= \underline{U}_A\underline{I}_A^* - \underline{U}_C\underline{I}_A^* + \underline{U}_B\underline{I}_B^* - \underline{U}_C\underline{I}_B^*. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$

и

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_A - \underline{I}_B,$$

последнее выражение можно записать в виде

$$\underline{U}_A\underline{I}_A^* + \underline{U}_B\underline{I}_B^* + \underline{U}_C\underline{I}_C^*,$$

что соответствует полной комплексной трехфазной цепи.

Сумма реальных частей каждого слагаемого соответствует активной мощности трехфазной цепи. Следовательно, активную мощность трехфазной цепи можно измерить двумя ваттметрами. Такой метод измерения активной мощности называют методом двух ваттметров.

Глава 7. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

Во многих случаях при установившемся процессе кривые периодических ЭДС, токов, напряжений в той или иной мере отличаются от синусоиды. Такие периодические несинусоидальные ЭДС, напряжения, токи можно представить в виде рядов Фурье, которые в общем случае содержат постоянную составляющую, основную гармонику, имеющую период, равный периоду самой функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты основной гармоники.

Для линейных электрических цепей при периодических, несинусоидальных внешних воздействиях применим метод наложения. Основываясь на нем, можно предложить следующий алгоритм расчета.

7.1. Алгоритм расчета

1. Заданное аналитическое выражение периодического несинусоидального напряжения (ЭДС, тока) раскладываем в ряд Фурье в тригонометрической форме

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_{uk}),$$

где k – номер гармоники.

2. Каждую гармонику напряжения (ЭДС, тока) записываем в комплексной форме $\underline{U}_{mk} = U_{mk} e^{j\psi_{uk}}$.

3. Для каждой гармоники определяем (в зависимости от выбранного метода расчета) комплексное сопротивление или комплексную проводимость

$$X_{Lk} = k\omega L; \quad X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C};$$

$$B_{Lk} = \frac{1}{k\omega L}; \quad B_{Ck} = k\omega C.$$

4. Для каждой гармоники напряжения (ЭДС, тока) находим комплексную амплитуду тока $\underline{I}_{mk} = I_{mk} e^{j\psi_{ik}}$.

5. Записываем выражение для мгновенного значения тока для каждой гармоники в отдельности. Мгновенное значение периодического несинусоидального тока получают, суммируя мгновенные значения всех гармонических составляющих токов:

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \Psi_{i1}) + I_{m2} \sin(2\omega t + \Psi_{i2}) + I_{m3} \sin(3\omega t + \Psi_{i3}) + \mathbf{K},$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_{ik}).$$

7.2. Представление периодической несинусоидальной функции в виде ряда Фурье

Любая периодическая несинусоидальная функция может быть представлена в виде ряда Фурье, если она удовлетворяет условиям Дирихле (функция должна иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число экстремумов). В реальных физических цепях таким условиям удовлетворяют все функции напряжения, ЭДС, тока:

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \Psi_{u1}) + U_{m2} \sin(2\omega t + \Psi_{u2}) + \dots + \\ + U_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_{uk}),$$

где U_0 – постоянная составляющая напряжения; $U_{m1} \sin(\omega t + \Psi_{1k})$ – основная (первая) гармоника; $U_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_{uk})$ – высшая (k -я) гармоника; U_{mk} – амплитуда k -й гармоники; Ψ_k – начальная фаза k -й гармоники; $k\omega$ – круговая частота k -й гармоники.

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но при расчете обычно ограничиваются некоторым конечным числом членов ряда, определяемым требуемой точностью расчета.

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусы и косинусы без начальных фаз:

$$U_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_k) = U_{mk} \cos \Psi_k \sin k\omega t + U_{mk} \sin \Psi_k \cos k\omega t = \\ = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t,$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t,$$

где $B_k = U_{mk} \cos \Psi_k$; $C_k = U_{mk} \sin \Psi_k$; $U_{mk} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$; $\operatorname{tg} \Psi_k = \frac{C_k}{B_k}$.

Постоянная составляющая U_0 и коэффициенты B_k, C_k могут быть определены из выражений

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t dt,$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t dt.$$

U_0, B_k, C_k можно также определить из соответствующих графиков, используя формулы приближенного исчисления интегралов.

7.3. Гармонический состав кривой в некоторых случаях симметрии

7.3.1. Симметрия относительно оси абсцисс

График функции $u(t)$ с симметрией относительно оси абсцисс представлен на рис. 7.1. Для такого случая симметрии справедливо условие

$$u(t) = -u\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

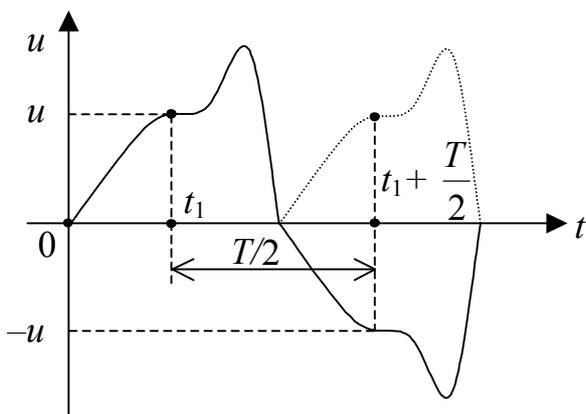


Рис. 7.1

Ряд не содержит четных гармоник так как для них не удовлетворяется вышеприведенное условие $B_k = C_k = 0$ при $k = 2, 4, 6, \dots$. Любая симметричная относительно оси абсцисс кривая содержит только нечетные гармоники

$$u(t) = \sum_{k=1}^n U_{mk} \sin(k\omega t + \Psi_{uk}),$$

где $U_0 = 0, k = 1, 3, 5, 7$.

7.3.2. Симметрия относительно оси ординат

График функции $u(t)$ с симметрией относительно оси ординат представлен на рис. 7.2. Для такого случая симметрии справедливо условие

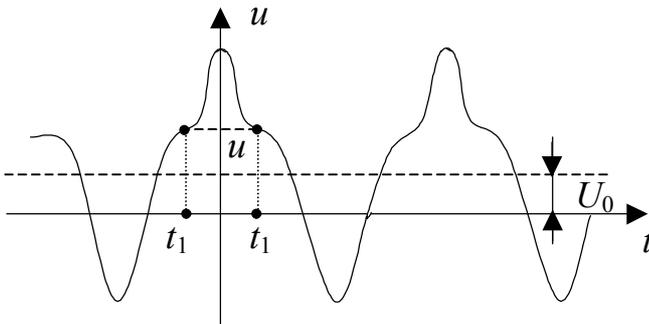


Рис. 7.2

$$u(t) = u(-t).$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_k = 0.$$

$$u(t) = U_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t,$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n C_{mk} \cos k\omega t,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

7.3.3. Симметрия относительно начала координат

График функции $u(t)$ с симметрией относительно начала координат представлен на рис. 7.3. Для такого случая симметрии справедливо условие

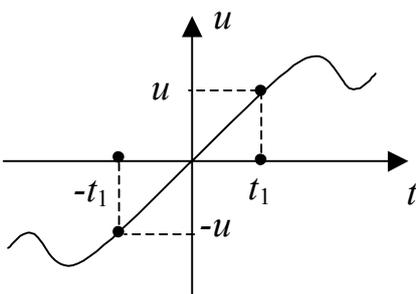


Рис. 7.3

$$u(t) = -u(-t).$$

$$U_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0.$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \sin k\omega t,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

7.4. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты и, следовательно, оказывается различным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения.

Пусть в цепи, к которой приложено периодическое несинусоидальное напряжение, содержится только резистор R . Тогда

$$U_{m1} = I_{m1} R, \quad U_{mk} = I_{mk} R.$$

Сопротивление резистора не зависит от частоты. Поэтому процентное содержание высших гармоник в кривой тока такое же, как и в кривой напряжения

$$\frac{U_{mk}}{U_{m1}} = \frac{I_{mk}}{I_{m1}},$$

следовательно, активное сопротивление не вносит искажений в форму кривой тока.

Пусть в цепи, к которой приложено периодическое несинусоидальное напряжение, содержится только индуктивная катушка с индуктивностью L . Тогда

$$\begin{aligned} U_{m1} &= I_{m1} \omega L, \\ U_{mk} &= I_{mk} k \omega L, \\ \frac{I_{mk}}{I_{m1}} &= \frac{U_{mk}}{k U_{m1}}, \end{aligned}$$

где $k = 2, 3, 4, \dots$. Таким образом, содержание высших гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения. Говорят, что *катушка сглаживает кривую тока*.

Пусть в цепи, к которой приложено периодическое несинусоидальное напряжение, содержится только конденсатор емкостью C . Тогда

$$\begin{aligned} I_{m1} &= \frac{U_{m1}}{X_C} = \frac{U_{m1}}{1/\omega C} = \omega C U_{m1}, \\ I_{mk} &= \frac{U_{mk}}{X_{kC}} = \frac{U_{mk}}{1/k\omega C} = k\omega C U_{mk}, \\ \frac{I_{mk}}{I_{m1}} &= k \frac{U_{mk}}{U_{m1}}. \end{aligned}$$

Содержание высших гармоник, выраженных в долях первой гармоники, в кривой тока больше, чем в кривой напряжения. Говорят, *конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения*.

7.5. Действующее значение периодических несинусоидальных токов, напряжений, ЭДС

Для определения действующего значения любого периодического тока (напряжения, ЭДС) справедливо выражение

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

В случае если ток представлен в виде ряда Фурье $i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k$, то

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k)^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} i_k^2 dt + \int_0^T \sum_{\substack{q=0 \\ S=0}}^{S=\infty} i_q i_S dt \right]} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}. \end{aligned}$$

Если известны амплитудные значения функций, составляющих ряд Фурье, то действующее значение периодической несинусоидальной функции может быть найдено как

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Аналогично для напряжения можно записать

$$U = \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{U_{mk}}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

7.6. Определение мощности в электрических цепях с периодическими несинусоидальными токами, напряжениями, ЭДС

Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих тока и напряжения

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k)(i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k) dt = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{q=0}^{S=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_S dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \\
 &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + \\
 &\quad + U_k I_k \cos \varphi_k.
 \end{aligned}$$

Коэффициент мощности при периодических несинусоидальных токах и напряжениях λ определяется из соотношения $P = UI\lambda$

$$\lambda = \frac{P}{IU} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}}.$$

Величина $\lambda=1$ только в том случае, если цепь состоит только из активных сопротивлений, не зависящих от частоты. В случае, когда в цепи содержатся реактивные элементы, но отсутствуют постоянные составляющие и высшие гармоники, то $\lambda = \cos \varphi$.

Появление высших гармоник в кривых напряжения и тока ведет к снижению коэффициента мощности по сравнению со случаем, когда ток и напряжение при тех же действующих значениях синусоидальны.

ГЛОССАРИЙ

Глоссарий составлен на основе Государственного стандарта Российской Федерации «Электротехника. Термины и определения основных понятий», ГОСТ Р52002-2003, принятого и введенного в действие постановлением Госстандарта России от 9 января 2003 г. [11].

В глоссарии приведены также определения, не вошедшие в ГОСТ Р52002-2003, но часто используемые в учебной литературе по электротехнике [1-5, 12].

1. Амплитуда синусоидального электрического тока комплексная

Комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе данного синусоидального электрического тока.

Примечание – Аналогично определяют комплексные амплитуды синусоидальных электрического напряжения, магнитного потока, электрического заряда и т.д.

2. Анализ схемы электрической цепи

Аналитическое или числовое описание процессов в электрической цепи и ее свойств при заданных ее топологии и параметрах элементов.

3. Величина входная (электрической цепи)

Электрический ток или электрическое напряжение, подводимое к выводам электрической цепи, рассматриваемым как ее вход.

4. Величина выходная (электрической цепи)

Электрический ток или электрическое напряжение на выводах электрической цепи, рассматриваемых как ее выход.

5. Ветвь (электрической цепи)

Участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же электрический ток.

6. Вывод (электрической цепи)

Точка электрической цепи, предназначенная для выполнения соединений с другой электрической цепью.

7. Двухполюсник

Часть электрической цепи с двумя выделенными выводами.

8. Диагностика (электрической) цепи

Определение неизвестных параметров электрической цепи при известных топологии цепи, части параметров цепи и ее реакции на различные воздействия.

9. Запаздывание по фазе (первой синусоидальной функции относительно второй)

Алгебраическая величина, определяемая вычитанием начальной фазы первой синусоидальной функции из начальной фазы второй синусоидальной функции, имеющей такой же период.

Примечание – Если начальные фазы синусоидального электрического напряжения и синусоидального электрического тока равны соответственно ψ_u и ψ_i , то запаздывание по фазе синусоиды тока относительно синусоиды напряжения равно $\psi_u - \psi_i$.

10. Значение периодического электрического тока действующее

Среднеквадратичное значение периодического электрического тока за период.

Примечание – Аналогично определяют действующие значения периодических электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

11. Значение синусоидального электрического тока действующее комплексное

Комплексная величина, модуль которой равен действующему значению синусоидального электрического тока и аргумент которой равен начальной фазе этого электрического тока.

Примечание – Аналогично определяют комплексные действующие значения синусоидальных электрического напряжения, магнитного потока, электрического заряда и т.д.

12. Значение тока действующее

Среднеквадратичное значение периодического электрического тока за период.

Примечание – Аналогично определяют действующие значения периодических электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

13. Значение (электрического) тока мгновенное

Значение электрического тока в рассматриваемый момент времени.

Примечание – Аналогично определяют мгновенные значения электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

14. Индуктивность (собственная)

Скалярная величина, равная отношению потокосцепления самоиндукции элемента электрической цепи к электрическому току в нем.

15. Индуктивность взаимная

Скалярная величина, равная отношению потокосцепления взаимной индукции одного элемента электрической цепи к электрическому току в другом элементе, обуславливающему это потокосцепление.

16. Индукция взаимная

Электромагнитная индукция, вызванная изменением сцепляющегося с контуром магнитного потока, обусловленного электрическими токами в других контурах.

17. Индукция магнитная

Векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся электрически заряженную частицу со стороны магнитного поля.

Примечание – Магнитная индукция равна отношению силы, действующей на электрически заряженную частицу, к произведению заряда и скорости частицы, если направление скорости таково, что эта сила максимальна и имеет направление, перпендикулярное к векторам силы и скорости, совпадающее с поступательным перемещением правого винта при вращении его от направления силы к направлению скорости частицы с положительным зарядом.

18. Индукция электромагнитная

Явление возбуждения электродвижущей силы в контуре при изменении магнитного потока, сцепляющегося с ним.

19. Источник (электрического) напряжения идеальный

Источник электрической энергии, электрическое напряжение на выводах которого не зависит от электрического тока в нем.

20. Источник (электрического) тока

Источник электрической энергии, характеризующийся электрическим током в нем и внутренней проводимостью.

21. Источник (электрического) тока идеальный

Источник электрической энергии, электрический ток которого не зависит от напряжения на его выводах.

22. Источник электрического напряжения

Источник электрической энергии, характеризующийся электродвижущей силой и внутренним электрическим сопротивлением.

23. Катушка (индуктивная)

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его собственной индуктивности и/или его магнитного поля.

24. Ключ (идеальный электрический)

Элемент электрической цепи, электрическое сопротивление которого принимает нулевое либо бесконечно большое значение, причем интервал времени перехода от одного состояния к другому бесконечно мал.

25. Конденсатор (электрический)

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрической емкости.

26. Контур (электрической цепи)

Последовательность ветвей электрической цепи, образующая замкнутый путь, в которой один из узлов одновременно является началом и концом пути, а остальные встречаются только один раз.

27. Контур колебательный

Электрическая цепь, в которой может возникать колебательная составляющая преходящего тока.

28. Коэффициент мощности (двухполюсника)

Скалярная величина, равная отношению активной мощности двухполюсника к полной мощности.

29. Многополюсник

Часть электрической цепи, имеющая более двух выделенных выводов.

30. Мощность (двухполюсника) активная

Величина, равная среднеарифметическому значению мгновенной мощности двухполюсника за период.

31. Мощность (двухполюсника) комплексная

Комплексная величина, равная произведению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения и сопряженного комплексного действующего значения синусоидального электрического тока двухполюсника.

32. Мощность (двухполюсника) мгновенная

Скорость поступления в двухполюсник электромагнитной энергии в рассматриваемый момент времени, равная произведению мгновенных значений электрического напряжения и электрического тока на входе двухполюсника.

33. Мощность (двухполюсника) полная

Величина, равная произведению действующих значений электрического напряжения и электрического тока на входе двухполюсника.

34. Мощность (двухполюсника) реактивная

Величина, равная при синусоидальном электрическом токе и электрическом напряжении произведению действующего значения напряжения на действующее значение тока и на синус сдвига фаз между напряжением и током двухполюсника.

35. Напряжение (электрическое)

Скалярная величина, равная линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль рассматриваемого пути.

Примечание – Электрическое напряжение U_{12} вдоль рассматриваемого пути от точки 1 к точке 2 определяют по формуле

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E dl,$$

где E – напряженность электрического поля; dl – бесконечно малый элемент пути; r_1 и r_2 – радиус-векторы точек 1 и 2.

36. Опережение по фазе (первой синусоидальной функции относительно второй)

Алгебраическая величина, определяемая вычитанием начальной фазы второй синусоидальной функции из начальной фазы первой синусоидальной функции, имеющей такой же период.

Примечание – Если начальные фазы синусоидального электрического напряжения и синусоидального электрического тока равны соответственно ψ_u и ψ_i , то опережение по фазе синусоиды напряжения относительно синусоиды тока равно $\psi_u - \psi_i$.

37. Параметр электрической цепи [элемента электрической цепи]

Величина, характеризующая какое-либо свойство электрической цепи [элемента электрической цепи] в качественном и количественном отношениях.

38. Период (электрического тока)

Наименьший интервал времени, по истечении которого мгновенные значения периодического электрического тока повторяются в неизменной последовательности.

Примечание – Аналогично определяют периоды электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

39. Потенциал (данной точки) (электрический)

Разность электрических потенциалов данной точки и другой определенной, произвольно выбранной точки.

40. По ток магнитный

Скалярная величина, равная потоку магнитной индукции.

41. По токосцепление

Сумма магнитных потоков, сцепленных с элементами контура электрической цепи.

42. По токосцепление взаимной индукции

Потокосцепление одного элемента электрической цепи, обусловленное электрическим током в другом элементе цепи.

43. По токосцепление самоиндукции

Потокосцепление элемента электрической цепи, обусловленное электрическим током в этом элементе.

44. Проводимость (электрическая) активная

Параметр пассивного двухполюсника, равный отношению активной мощности, поглощаемой в этом двухполюснике, к квадрату действующего значения электрического напряжения на его выводах.

45. Проводимость (электрическая) взаимная

Величина, равная отношению выходного электрического тока к входному электрическому напряжению, выраженных в операторной или комплексной форме.

46. Проводимость (для постоянного тока) электрическая

Скалярная величина, равная отношению постоянного электрического тока через пассивный двухполюсник к постоянному электрическому напряжению между выводами этого двухполюсника.

47. Проводимость комплексная (электрическая)

Комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического тока в пассивной электрической цепи или в ее элементе к комплексному действующему значению синусоидального электрического напряжения на выводах этой цепи или на этом элементе.

48. Проводимость операторная (электрическая)

Величина, равная отношению операторного электрического тока на входе линейного пассивного двухполюсника к операторному электрическому напряжению на его выводах при нулевых начальных значениях электрических токов в индуктивных катушках и электрических напряжений на электрических конденсаторах.

49. Проводимость полная (электрическая)

Параметр пассивного двухполюсника, равный отношению действующего значения электрического тока через этот двухполюсник к действующему значению электрического напряжения между выводами двухполюсника при синусоидальных электрическом напряжении и электрическом токе.

50. Проводимость реактивная

Мнимая часть комплексной электрической проводимости.

Примечание – Реактивная проводимость конденсатора положительна, индуктивной катушки – отрицательна.

51. Проводимость электрическая

Скалярная величина, равная отношению постоянного электрического тока через пассивный двухполюсник к постоянному электрическому напряжению между выводами этого двухполюсника.

52. Разность потенциалов (электрических)

Электрическое напряжение в безвихревом электрическом поле, характеризующееся независимостью от выбора пути интегрирования.

53. Режим (в электрической цепи) установившийся

Режим электрической цепи, при котором электродвижущие силы, электрические напряжения и электрические токи в электрической цепи являются постоянными или периодическими.

54. Резистор

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления.

55. Резонанс (в электрической цепи)

Явление в электрической цепи, содержащей участки, имеющие индуктивный и емкостный характер, при котором разность фаз синусоидального электрического напряжения и синусоидального электрического тока на входе цепи равна нулю.

56. Резонанс напряжений

Резонанс в участке электрической цепи, содержащей последовательно соединенные индуктивный и емкостный элементы.

57. Резонанс токов

Резонанс в участке электрической цепи, содержащей параллельно соединенные индуктивный и емкостный элементы.

58. Самоиндукция

Электромагнитная индукция, вызванная изменением сцепляющегося с контуром магнитного потока, обусловленного электрическим током в этом контуре.

59. Связь гальваническая

Связь электрических цепей посредством электрического поля в проводящей среде.

60. Связь индуктивная

Связь электрических цепей посредством магнитного поля.

61. Сдвиг фаз между напряжением и током

Алгебраическая величина, определяемая вычитанием начальной фазы синусоидального электрического тока из начальной фазы синусоидального электрического напряжения.

62. Сила электродвижущая; ЭДС

Скалярная величина, характеризующая способность стороннего поля и индуцированного электрического поля вызывать электрический ток.

Примечание – Электродвижущая сила равна линейному интегралу напряженности стороннего поля и индуцированного электрического поля вдоль рассматриваемого пути между двумя точками или вдоль рассматриваемого замкнутого контура; в случае движения элементов контура напряженность индуцированного электрического поля определяют с учетом силы Лоренца.

63. Синтез (электрической цепи)

Выбор топологии электрической цепи и определение параметров элементов ее схемы замещения, позволяющих получить заданные свойства цепи.

64. Система многофазная уравновешенная

Многофазная система электродвижущих сил и электрических токов, при которой мгновенная мощность в многофазной электрической цепи, обусловленная ими, не зависит от времени.

65. Система нулевой последовательности (токов) (симметричная)

Симметричная многофазная система электрических токов, в которой электрические токи совпадают по фазе.

Примечание – Аналогично определяют симметричные системы нулевой последовательности электрических напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

66. Система обратной последовательности (токов) (симметричная)

Симметричная многофазная система электрических токов, порядок следования фаз которых обратен основному.

Примечания:

1. При обратном порядке следования фаз сдвиги по фазе каждой из фаз симметричной многофазной системы электрических токов относительно фазы, принятой за первую, уменьшаются или увеличиваются на одинаковую величину, равную $2\pi(1 - k)/m$, где m – число фаз; $k = 1, 2, \dots, m$ – номер фазы.

2. Аналогично определяют симметричные системы обратных последовательностей напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

67. Система прямой последовательности (токов) (симметричная)

Симметричная многофазная система электрических токов, порядок следования фаз которых принят в качестве основного.

Примечания:

1. При основном порядке следования фаз сдвиги по фазе каждой из фаз симметричной многофазной системы электрических токов относительно фазы, принятой за первую, увеличиваются или уменьшаются на одинаковую величину, равную $2\pi(1 - k)/m$, где m – число фаз; $k = 1, 2, \dots, m$ – номер фазы.

2. Аналогично определяют симметричные системы прямой последовательности напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

68. Система электрических токов многофазная

Совокупность синусоидальных электрических токов одной частоты, сдвинутых друг относительно друга по фазе, действующих в многофазной системе электрических цепей.

Примечание – Аналогично определяют многофазные системы электрических напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

69. Система электрических токов многофазная симметричная [несимметричная]

Многофазная система электрических токов, в которой электрические токи равны [не равны] по амплитуде и/или сдвинуты друг относительно друга по фазе на одинаковые [неодинаковые] углы.

Примечания:

1. У симметричной многофазной системы электрических токов сдвиг электрических токов друг относительно друга по фазе составляет угол, равный $2\pi/m$, где m – число фаз.

2. Аналогично определяют симметричные [несимметричные] многофазные системы электрических напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

70. Система электрических токов трехфазная

Многофазная система электрических токов при числе фаз, равном трем.

Примечание – Аналогично определяют трехфазные системы электрических напряжений, электродвижущих сил, магнитных потоков и т.д.

71. Система электрических цепей многофазная

Совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные электродвижущие силы одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе, создаваемые общим источником электрической энергии.

72. Соединение (электрическое)

Соединение участков электрической цепи, с помощью которого образуется электрическая цепь.

73. Соединение (участков электрической цепи) параллельное

Электрическое соединение, при котором рассматриваемые участки электрической цепи присоединяются к одной паре узлов.

74. Соединение (участков электрической цепи) последовательное

Электрическое соединение, при котором через рассматриваемые участки электрической цепи возможен только один и тот же электрический ток.

75. Соединение (участков электрической цепи) смешанное

Сочетание последовательного и параллельного соединений участков электрической цепи.

76. Сопротивление (электрическое) активное

Параметр пассивного двухполюсника, равный отношению активной мощности, поглощаемой в этом двухполюснике, к квадрату действующего значения электрического тока через этот двухполюсник.

77. Сопротивление (электрическое) взаимное

Величина, равная отношению выходного электрического напряжения к входному электрическому току, выраженных в операторной или комплексной форме.

78. Сопротивление емкостное

Реактивное сопротивление, обусловленное емкостью элемента электрической цепи и равное абсолютному значению величины, обратной произведению значений этой емкости и угловой частоты.

79. Сопротивление индуктивное

Реактивное сопротивление, обусловленное собственной индуктивностью элемента электрической цепи и равное произведению значений индуктивности и угловой частоты.

80. Сопротивление (электрическое) комплексное

Комплексная величина, равная отношению комплексного действующего значения синусоидального электрического напряжения на выводах пассивной электрической цепи или ее элемента к комплексному действующему значению синусоидального электрического тока в этой цепи или в этом элементе.

81. Сопротивление (электрическое) операторное

Величина, равная отношению операторного электрического напряжения на выводах линейного пассивного двухполюсника к операторному электрическому току в этом двухполюснике при нулевых начальных значениях электрических токов в индуктивных катушках и электрических напряжениях на электрических конденсаторах.

82. Сопротивление (электрическое) полное

Параметр пассивного двухполюсника, равный отношению действующего значения электрического напряжения на выводах этого двухполюсника к действующему значению электрического тока через двухполюсник при синусоидальном электрическом напряжении и электрическом токе.

83. Сопротивление постоянному току электрическое

Скалярная величина, равная отношению постоянного электрического напряжения между выводами пассивного двухполюсника к постоянному электрическому току в нем.

84. Сопротивление реактивное

Параметр пассивного двухполюсника, равный квадратному корню из разности квадратов полного и активного электрических сопротивлений двухполюсника, взятому со знаком плюс, если электрический ток отстает по фазе от электрического напряжения, и со знаком минус, если электрический ток опережает по фазе напряжение.

85. Схема (электрической цепи)

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов и показывающее соединения этих элементов.

86. Схема замещения (электрической цепи)

Схема электрической цепи, отображающая свойства цепи при определенных условиях.

87. Схема (электрической цепи) планарная

Схема электрической цепи, которая на плоскости может быть изображена с непересекающимися ветвями.

88. Схема (электрической цепи) эквивалентная

Схема замещения электрической цепи, в которой величины, подлежащие рассмотрению, имеют те же значения, что и в исходной схеме замещения.

89. Ток (полный)

Скалярная величина, равная сумме электрического тока проводимости, электрического тока переноса и электрического тока смещения сквозь рассматриваемую поверхность.

90. Ток (электрический) операторный

Величина, полученная преобразованием Лапласа из мгновенного значения электрического тока, рассматриваемого как функция времени.

Примечание – Аналогично определяют операторные электрическое напряжение, магнитный поток, электродвижущую силу, электрический заряд и т.д.

91. Ток (электрический) переменный

Электрический ток, изменяющийся во времени.

Примечание – Аналогично определяют переменные электрическое напряжение, электродвижущую силу, магнитный поток и т.д.

92. Ток (электрический) периодический

Электрический ток, мгновенные значения которого повторяются через равные интервалы времени в неизменной последовательности.

Примечание – Аналогично определяют периодические электрическое напряжение, электродвижущую силу, магнитный поток и т.д.

93. Ток (электрический) постоянный

Электрический ток, не изменяющийся во времени.

Примечание – Аналогично определяют постоянные электрическое напряжение, электродвижущую силу, магнитный поток и т.д.

94. Ток (электрический) синусоидальный

Периодический электрический ток, являющийся синусоидальной функцией времени.

Примечание – Аналогично определяют синусоидальные электрическое напряжение, электродвижущую силу, магнитный поток и т.д.

95. Ток электрический

Явление направленного движения носителей электрических зарядов и (или) явление изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем.

96. Узел (электрической цепи)

Место соединения ветвей электрической цепи.

97. Участок (электрической) цепи

Часть электрической цепи, содержащая выделенную совокупность ее элементов.

98. Фаза (многофазной системы электрических цепей)

Часть многофазной системы электрических цепей, в которой может протекать один из электрических токов многофазной системы электрических токов.

99. Фаза (синусоидального электрического тока) начальная

Значение фазы синусоидального тока в начальный момент времени.

Примечание – Аналогично определяют начальные фазы синусоидальных электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

100. Фаза (синусоидального электрического) тока

Аргумент синусоидального электрического тока, отсчитываемый от точки перехода значения тока через нуль к положительному значению.

Примечание – Аналогично определяют фазы синусоидальных электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

101. Характеристика (источника электрической энергии) внешняя

Зависимость между электрическим напряжением на выводах источника электрической энергии и электрическим током в нем.

102. Характеристика вольт-амперная

Зависимость электрического напряжения на выводах элемента электрической цепи от электрического тока в нем.

103. Цепи электрические связанные

Электрические цепи, процессы в которых влияют друг на друга посредством общего магнитного поля или общего электрического поля.

104. Цепь (электрическая) активная

Электрическая цепь, содержащая источники электрической энергии.

Примечание – Аналогично определяют активные участки электрической цепи, двухполюсник

105. Цепь (электрическая) пассивная

Электрическая цепь, не содержащая источников электрической энергии.

Примечание – Аналогично определяют пассивные участки электрической цепи, двухполюсник

106. Цепь с сосредоточенными параметрами электрическая

Электрическая цепь, в которой электрические сопротивления, индуктивности и электрические емкости считают сосредоточенными на отдельных участках этой цепи.

107. Цепь электрическая

Совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе, электрическом токе и электрическом напряжении

108. Цепь электрическая линейная [нелинейная]

Электрическая цепь, у которой электрические напряжения и электрические токи или (и) электрические токи и магнитные потокоцепления, или (и) электрические заряды и электрические напряжения связаны друг с другом линейными [нелинейными] зависимостями.

109. Цепь электрическая многофазная

Многофазная система электрических цепей, в которой отдельные фазы электрически соединены друг с другом.

110. Цепь электрическая многофазная симметричная

Многофазная электрическая цепь, в которой комплексные электрические сопротивления составляющих ее фаз одинаковы.

111. Частота (электрического тока)

Величина, обратная периоду электрического тока.

Примечание – Аналогично определяют частоты электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

112. Частота колебательного контура собственная

Частота колебательной составляющей преходящего тока.

113. Частота резонансная

Частота электрического тока и электрического напряжения при резонансе в электрической цепи.

114. Частота (синусоидального электрического тока) угловая

Скорость изменения фазы синусоидального электрического тока, равная частоте синусоидального электрического тока, умноженной на 2π .

Примечание – Аналогично определяют угловые частоты синусоидальных электрического напряжения, электродвижущей силы, магнитного потока и т.д.

115. Четырехполюсник

Часть электрической цепи, имеющая две пары выводов, которые могут быть входными или выходными.

116. Элемент (электрической цепи) идеальный

Абстрактное представление элемента электрической цепи, характеризующееся одним параметром.

117. Элемент (электрической цепи) линейный [нелинейный]

Элемент электрической цепи, у которого электрические напряжения и электрические токи или (и) электрические токи и магнитные потокосцепления, или (и) электрические заряды и электрические напряжения связаны друг с другом линейными [нелинейными] зависимостями.

118. Элемент (электрической) цепи

Отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи, выполняющее в ней определенную функцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Теоретические основы электротехники: Учеб. для вузов/ К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин.-4-е изд., доп. для самост. изучения курса. -СПб.:Питер.-(Учебник для вузов).- Т.1.-2003.-463 с.:ил.
2. Теоретические основы электротехники: Учеб. для вузов/ К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин.-4-е изд., доп. для самост. изучения курса. -СПб.:Питер.-(Учебник для вузов).- Т.2.-2003.-576 с.:ил.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник для вузов.-10-е изд., стереотип.-М.: Гардарики,2003.-638 с.:ил.
4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для вузов/ Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др.; Под ред. Л.А. Бессонова.-4-е изд., перераб.-М.:Высш.школа, 2003.-528с.:ил.
5. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. - М.:Высшая школа, 1990.-544с.
6. Виноградова Л.Е., Лукманов В.С. Расчет электрических цепей Учеб. пособие /УГАТУ, Уфа, 2000.-96с.
7. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пос./Л. Е. Виноградова, А. В. Гусаров, В.И. Журавская и др.- Уфа: УГАТУ,2002.-31 с.

Дополнительный

8. Татур Т.А., Татур В.Е. Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях: Учеб. пособие для вузов.- М.: Высш. школа, 2001.-407с.
9. Опорный конспект по теории электрических цепей: Метод. указания / Сост.: Виноградова Л.Е., Лукманов В.С., Медведева Л.С. Чечулина И.Е; УГАТУ, Уфа 1997.-35с.
10. Лукманов В.С. Теоретические основы электротехники: Методические указания к контрольным работам для студентов заочной

формы обучения /Сост.: В.С. Лукманов; Уфимский гос. авиационный техн. ун-т. – Уфа, УГАТУ, 2002 – 27 с.

11. Государственный стандарт Российской Федерации ГОСТ Р52002-2003. Электротехника. Термины и определения основных понятий – М.: Издательство стандартов, 2003 – 28 с.

12. Электротехника. Терминология: Справочное пособие. – Вып. 3. – М.: Издательство стандартов, 1989. – 343 с.

Учебное издание

ЛУКМАНОВ Виталий Сабирович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Часть I
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Редактор З.Г. Кашаева

Подписано к печати 28.11.05. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать плоская.

Гарнитура Times New Roman Суг. Усл.печ.л. 7,5. Усл.кр.-отт. 7,5.

Уч.-изд.л. 7,4. Тираж 150 экз. Заказ № .

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет

Редакционно-издательский комплекс УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса,12