Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

И. Е. ЧЕЧУЛИНА, А. Р. ФАТХИЕВ, В. С. ЛУКМАНОВ

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ

*Допущено Редакционно-издательским советом УГАТУ
в качестве практикума для студентов всех форм обучения,
обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и специалистов
11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи,
11.03.04 Электроника и наноэлектроника, 12.03.01 Приборостроение,
12.03.04 Биотехнические системы и технологии, 13.03.02 Электроэнергетика
и электротехника, 27.03.03 Системный анализ и управление,
09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 10.03.01 Информационная
безопасность, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов
и производств, 27.03.04 Управление в технических системах,
11.05.04 Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи,
13.05.02 Специальные электромеханические системы,
24.05.06 Системы управления летательными аппаратами*

Уфа 2020

УДК
ББК
Ч57

Рецензенты:
врио генерального директора АО Инновационный научно-технологический центр «Искра» канд. техн. наук Р. Х. Ганцев;
профессор кафедры «Электрические машины и электрооборудование» ФГБОУ ВО «Башкирский государственный аграрный университет» д-р техн. наук, профессор, Р.С. Аипов

Чечулина И. Е., Фатхиев А. Р., Лукманов В. С.
Ч57 Анализ линейных электрических цепей в установившихся режимах: практикум/ Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа : РИК УГАТУ, 2020. – 181 с.
ISBN

Рассматриваются вопросы теоретического анализа и применения различных методов расчета электрических цепей постоянного, синусоидального и несинусоидального периодического тока, трехфазных цепей, а также резонансных явлений и цепей с взаимной индуктивностью.

Предназначен для студентов электротехнических направлений и специальностей, изучающих дисциплины «Теоретические основы электротехники», «Теоретические основы электротехники и электроизмерений», «Электротехника» и «Основы теории цепей».

УДК
ББК

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Практикум предназначен для проведения практических занятий для студентов, изучающих дисциплины «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), Теоретические основы электротехники и электроизмерений», «Электротехника» и «Основы теории цепей» и обучающихся по следующим направлениям и специальностям подготовки:

– *бакалавров*:
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 12.03.01 «Приборостроение», 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 10.03.01 «Информационная безопасность», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 27.03.04 «Управление в технических системах»;

– *специалистов:*
11.05.04 «Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи», 13.05.02 «Специальные электромеханические системы», 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами», 09.05.01 «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения», 10.05.05 «Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере», 27.05.01 «Специальные организационно-технические системы».

В практикуме представлены задачи по шести разделам дисциплины ТОЭ: анализ цепей постоянного тока (главы 1 и 2), анализ установившихся синусоидальных режимов в линейных цепях (главы 3 и 4), анализ резонансных явлений (глава 5), анализ магнитосвязанных цепей (глава 6), анализ трехфазных цепей (главы 7 и 8), анализ несинусоидальных периодических режимов в линейных цепях (глава 9).

Цели практикума:

– сформировать знания об основных законах теории электрических цепей;

– изучить особенности использования знаний о законах теории электрических цепей при решении различных инженерных задач, связанных с профессиональной деятельностью;

– овладеть знаниями, умениями и навыками, необходимыми для понимания и успешного решения инженерных проблем будущей специальности, что обеспечивает формирование профессиональных компетенций ФГОС ВО.

В результате решения задач и выполнения упражнений формируются следующие *компетенции* (табл. В1):

Таблица В1

№	Наименование формируемой компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
1	*2*	*3*
1	Способен использовать методы анализа и моделирования электрических цепей и электрических машин	1. Использует методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока. 2. Использует методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока. 3. Применяет знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами.

Основу практикума составляют типовые задачи с подробными решениями и пояснениями. Для эффективной самостоятельной работы в начале каждой главы приведены краткие теоретические сведения по рассматриваемой теме. Результаты освоения материала студенты могут оценивать самостоятельно с помощью контрольных задач по приведенным ответам.

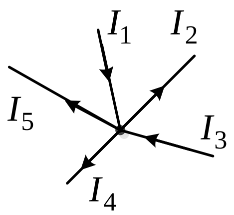
Практикум позволяет интенсифицировать учебный процесс в условиях аудиторных занятий, т.к. основная часть занятия посвящается разбору примеров решения типовых задач, приведенных в издании. Преподаватель акцентирует внимание студентов на сложных для понимания местах, не теряя времени на рутинный расчет. В этой части занятия происходит усвоение методик и приемов решения задач. За 30–40 минут удается подробно разобрать до шести примеров средней сложности. На следующем этапе осуществляется самостоятельное решение задач, представленных в практикуме, студентами под руководством преподавателя.

Данный практикум будет полезен и в условиях дистанционного обучения для приобретения студентами навыков решения задач по заданным темам и выполнения расчетно-графических, контрольных и иных работ. В этом случае теоретические сведения по изучаемой теме студент может получить в учебных пособиях [7], учебниках по курсу ТОЭ [3, 4, 5] либо в справочном пособии [10]. В условиях дистанционного обучения используемый в практикуме прием изложения от простого к сложному способствует эффективному усвоению теоретического и практического материала.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Краткие теоретические сведения

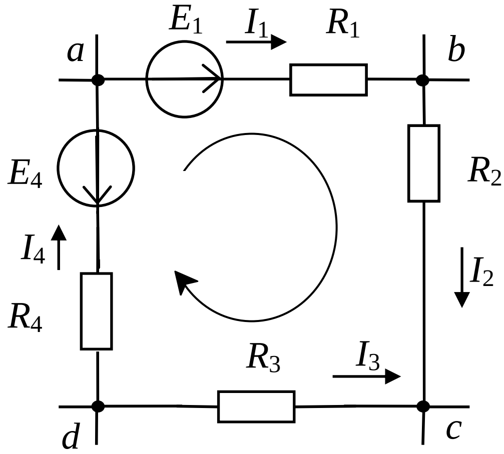
Первый закон Кирхгофа

	$\sum\limits_{k \in \text{узлу}} \pm I_k = 0$ $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$

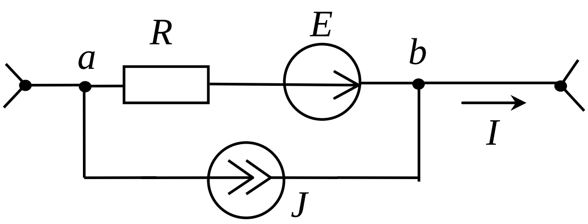
Второй закон Кирхгофа

$$\sum_{k \in \text{контуру}} \pm\ U_k = \sum_{k \in \text{контуру}} \pm\ E_k$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_1 - E_4$$

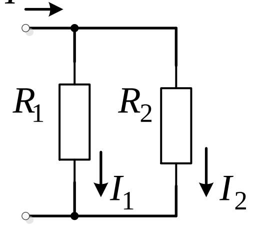


Обобщенный закон Ома для участка цепи



$$I = \frac{\pm U_{ab} \pm E}{R} \pm J\,, \qquad U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$$

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} + J$$

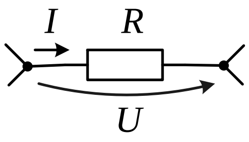
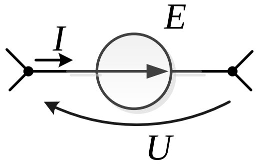
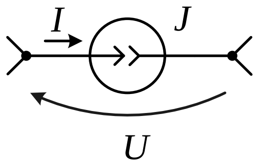


Формула разброса

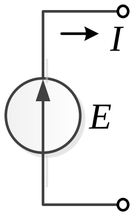
$$I_1 = I\,\frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I_2 = I\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

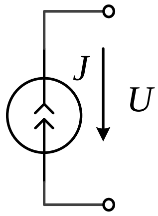
Компонентные уравнения простейших элементов схемы

№	Компонент (элемент)	Уравнение	Мощность
1	 *Резистор, сопротивление, проводимость* $G = 1/R$	*Закон Ома* $U = R \cdot I$ $I = G \cdot U$	$P = UI = RI^2 = U^2/R$ $P = UI = GU^2 = I^2/G$
2	 *ЭДС или источник напряжения*	$U = E$	$P_E = E \cdot I$
3	 *Источник тока*	$I = J$	$P_J = U \cdot J$

Баланс мощностей



$P_E = E \cdot I$



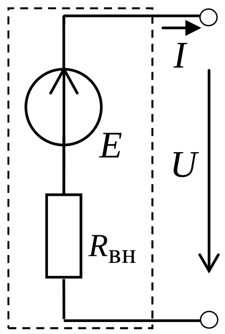
$P_J = J \cdot U$

$$\sum_{i=1}^{m} \pm P_{i_{\text{ист}}} = \sum_{j=1}^{n} P_{j_{\text{прием}}},$$

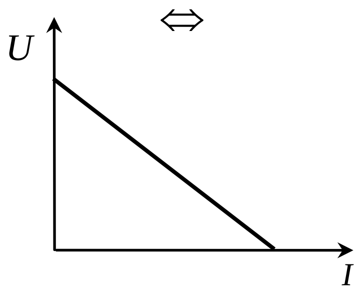
$$\sum_{s=1}^{q} \pm P_{E_s} + \sum_{k=1}^{l} \pm P_{J_k} = \sum_{j=1}^{n} I_j^2 R_j,$$

$$q + l = m$$

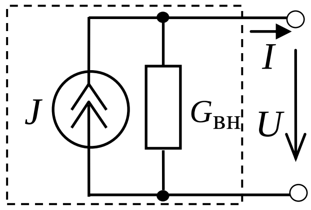
Схемы замещения источников



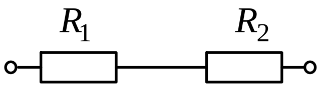
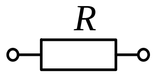
$E = J / G_{\text{вн}}$
$R_{\text{вн}} = 1 / G_{\text{вн}}$

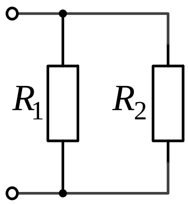
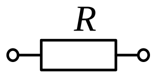


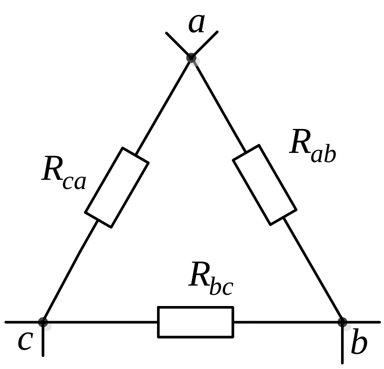
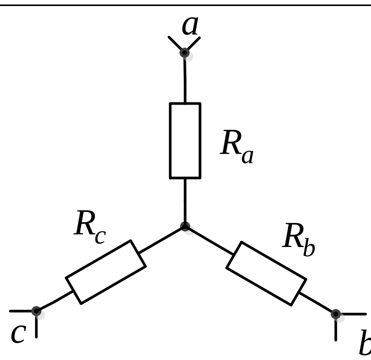
$U = E - I\,R_{\text{вн}}$ $\quad I = J - U\,G_{\text{вн}}$

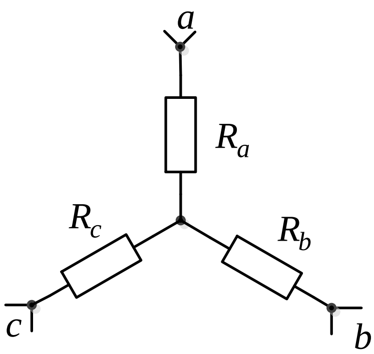
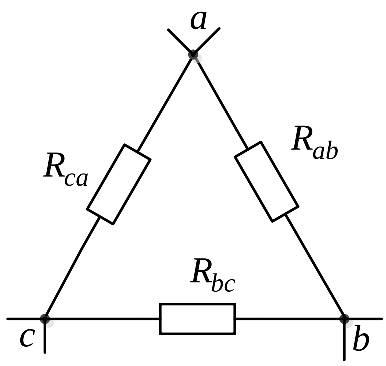


$J = E / R_{\text{вн}}$
$G_{\text{вн}} = 1 / R_{\text{вн}}$

<table>
<tr><td colspan="2">Эквивалентные преобразования соединений резисторов</td></tr>
<tr><td>Исходный фрагмент схемы</td><td>Результат преобразования</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$$R = R_1 + R_2$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

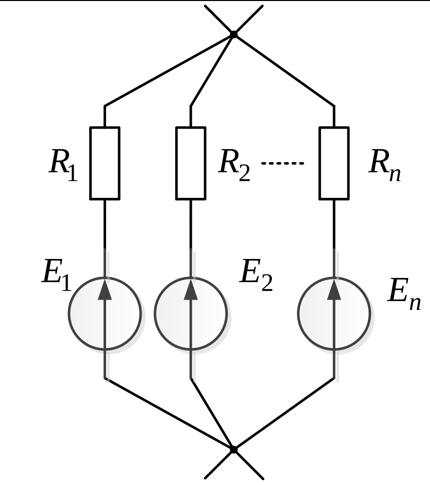
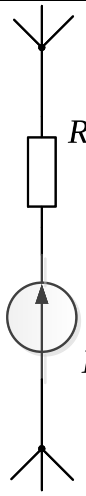
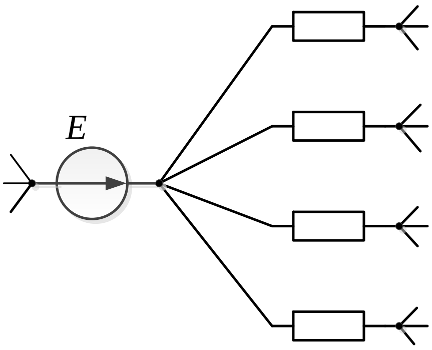
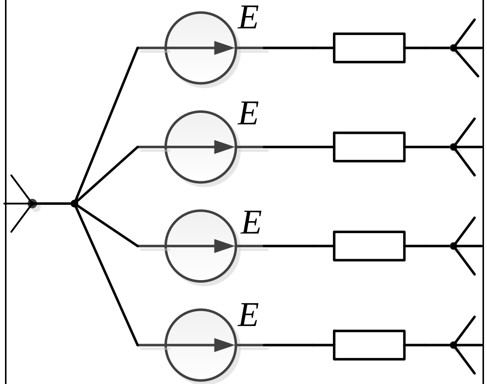
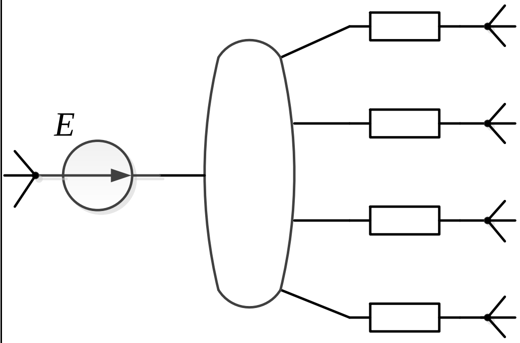
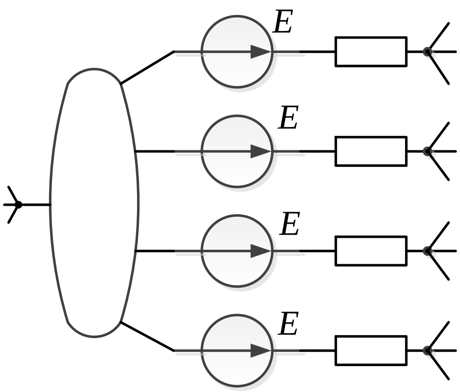
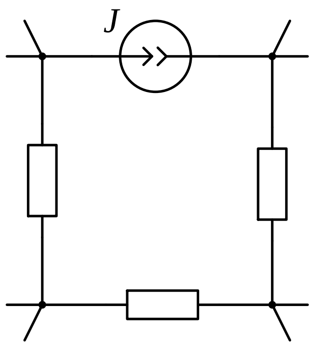
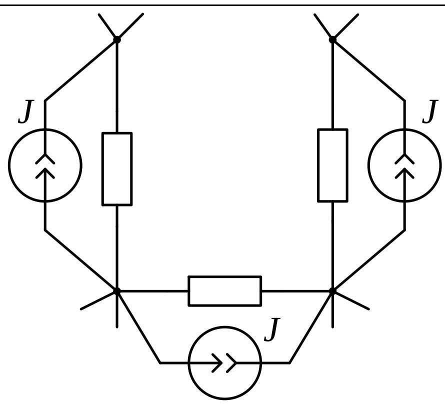
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \qquad R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \qquad R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}; \qquad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a};$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}$$</td></tr>
</table>

Преобразования электрических схем с источниками

Название	Исходный фрагмент схемы	Результат преобразования
Объединение параллельных ветвей		 $R_э = \dfrac{1}{\sum_k^1 \left(1/R_k \right)}$ $E_э = \sum_1^n \dfrac{\left(E_k/R_k \right)}{\left(1/R_k \right)}$
Перенос ЭДС через узел		
Перенос ЭДС через сечение		
Перенос источника тока вдоль контура		

1.2. Примеры и задачи

Задача 1.1

Определить входное сопротивление цепи постоянного тока со стороны полюсов ac и bc при разомкнутом положении ключа. Сопротивления всех резисторов 10 Ом. Найдите токи во всех ветвях схемы при подключении цепи к источнику напряжения $U = 100$ В.

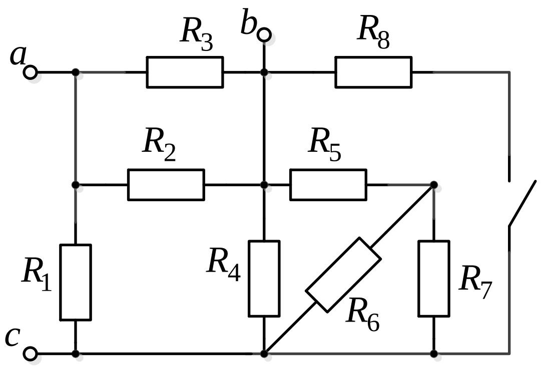


Рис. 1.1

Решение

При разомкнутом ключе заданная схема может быть представлена в более удобном для анализа виде (рис. 1.2).

Пары сопротивлений $R_2 - R_3$ и $R_6 - R_7$ соединены параллельно, и каждая из этих пар может быть заменена одним сопротивлением:

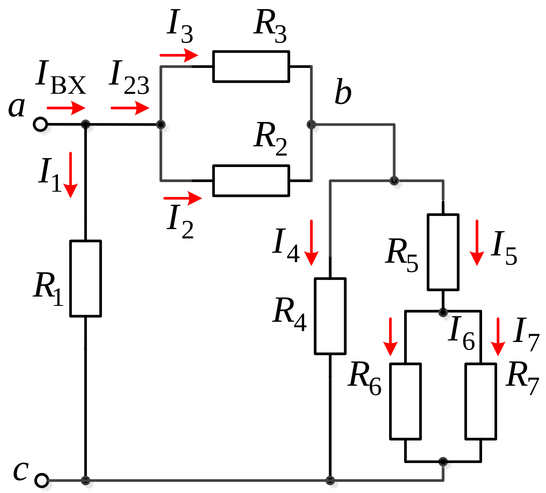


Рис. 1.2

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{67} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом}.$$

После осуществления преобразования видим, что сопротивления R_5 и R_{67} соединены последовательно и эквивалентируются одним сопротивлением $R_{675} = R_{67} + R_5 = 5 + 10 = 15$ Ом.

1. В результате выполненных преобразований получим схему, изображенную на рис. 1.3. По ней находим входное сопротивление и ток в цепи со стороны зажимов a и c:

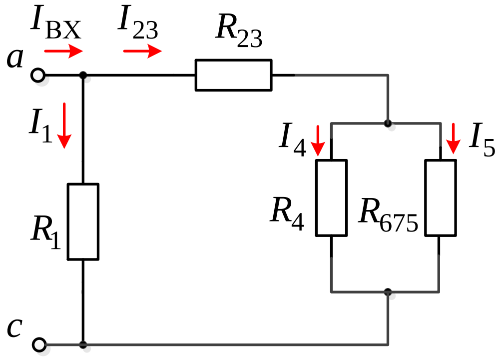


Рис. 1.3

$$R_{\text{ВХ}}^{ac} = \frac{R_1\left(R_{23}+\dfrac{R_4R_{675}}{R_4+R_{675}}\right)}{R_1+R_{23}+\dfrac{R_4R_{675}}{R_4+R_{675}}} = \frac{10\left(5+\dfrac{10\cdot15}{10+15}\right)}{10+5+\dfrac{10\cdot15}{10+15}} = 5{,}238 \ \text{Ом},$$

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{U}{R_{\text{ВХ}}^{ac}} = \frac{100}{5{,}238} = 19{,}091 \ \text{А}.$$

Токи в сопротивлениях определяются из соотношений:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \ \text{А}, \quad I_{23} = I_{\text{ВХ}} - I_1 = 19{,}091 - 10 = 9{,}091 \ \text{А},$$

$$I_2 = I_{23}\frac{R_3}{R_2+R_3} = 9{,}091\frac{10}{10+10} = 4{,}546 \ \text{А},$$

$$I_3 = I_{23}\frac{R_2}{R_2+R_3} = 9{,}091\frac{10}{10+10} = 4{,}546 \ \text{А},$$

$$I_4 = I_{23}\frac{R_{675}}{R_4+R_{675}} = 9{,}091\frac{15}{10+15} = 5{,}455 \ \text{А},$$

$$I_5 = I_{23} - I_4 = 9{,}091 - 5{,}4546 = 3{,}636 \ \text{А},$$

$$I_6 = I_5\frac{R_7}{R_6+R_7} = 3{,}6364\frac{10}{10+10} = 1{,}818 \ \text{А},$$

$$I_7 = I_5 - I_6 = 3{,}6364 - 1{,}8182 = 1{,}818 \ \text{А}.$$

2. Определим токи и входное сопротивление цепи при разомкнутом ключе в случае питания ее со стороны зажимов b и c (рис. 1.1). В этом случае после перехода от схемы рис. 1.1 к схеме рис. 1.2 последнюю удобнее представить в виде схемы, показанной на рис. 1.4, по которой находим

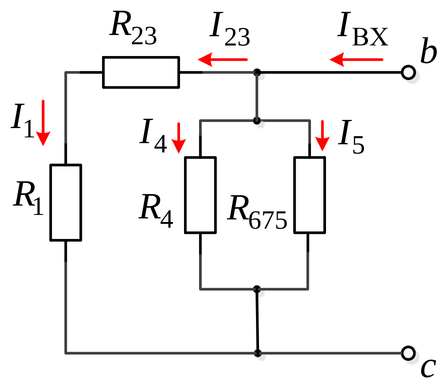


Рис. 1.4

$$R_{\text{ВХ}}^{bc} = \frac{(R_1+R_{23})\dfrac{R_4R_{675}}{R_4+R_{675}}}{R_1+R_{23}+\dfrac{R_4R_{675}}{R_4+R_{675}}} = \frac{(10+5)\cdot\dfrac{10\cdot15}{10+15}}{10+5+\dfrac{10\cdot15}{10+15}} = 4{,}286 \ \text{Ом},$$

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{U}{R_{\text{ВХ}}^{bc}} = \frac{100}{4{,}2857} = \ 23{,}333 \text{ А}.$$

Для токов I_1, I_4, I_5 имеем

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{100}{10+5} = 6{,}667 \text{ А}, \qquad I_4 = \frac{U}{R_4} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{U}{R_{675}} = \frac{100}{15} = 6{,}667 \text{ А}.$$

Находим остальные токи:

$$I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = \frac{6{,}667}{2} = 3{,}333 \text{ А}, \qquad I_6 = I_7 = \frac{I_5}{2} = \frac{6{,}667}{2} = 3{,}333 \text{ А}.$$

Ответ: 1. $R_{\text{ВХ}}^{ac} = 5{,}238$ Ом, $I_{\text{ВХ}} = 19{,}091$ А, $I_1 = 10$ А, $I_4 = 5{,}455$ А, $I_2 = I_3 = 4{,}546$ А, $I_5 = 3{,}636$ А, $I_6 = I_7 = 1{,}818$ А;
2. $R_{\text{ВХ}}^{bc} = 4{,}286$ Ом, $I_{\text{ВХ}} = 23{,}333$ А, $I_1 = 6{,}667$ А, $I_2 = I_3 = 3{,}333$ А, $I_4 = 10$ А, $I_5 = 6{,}667$ А, $I_6 = I_7 = 3{,}333$ А.

Задача 1.2

Определить входное сопротивление цепи постоянного тока, схема которой изображена на рис. 1.1, со стороны полюсов *ac* и *bc* при замкнутом положении ключа. Сопротивления всех резисторов 10 Ом.

Ответ: $R_{\text{ВХ}}^{ac} = 4{,}667$ Ом, $R_{\text{ВХ}}^{bc} = 3$ Ом.

Задача 1.3

Определить входное сопротивление относительно зажимов *ab*, *ac*, *cb* в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.5, при разомкнутом и замкнутом ключе. Сопротивления всех резисторов 10 Ом.

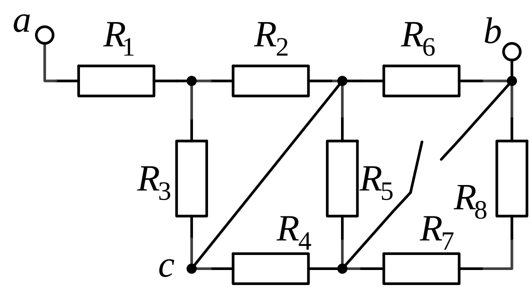


Рис. 1.5

Ответ: $R_{\text{ВХ}}^{ab} = 22{,}14$ Ом, $R_{\text{ВХ}}^{ac} = 15$ Ом, $R_{\text{ВХ}}^{bc} = 7{,}14$ Ом при разомкнутом ключе; $R_{\text{ВХ}}^{ab} = 18{,}33$ Ом, $R_{\text{ВХ}}^{ac} = 15$ Ом, $R_{\text{ВХ}}^{bc} = 3{,}33$ Ом при замкнутом ключе.

Задача 1.4

Определить напряжение U_{ak} в электрической цепи, изображенной на рис. 1.6, если $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $E_1 = 2$ В, $E_2 = 4$ В, $E_3 = 24$ В.

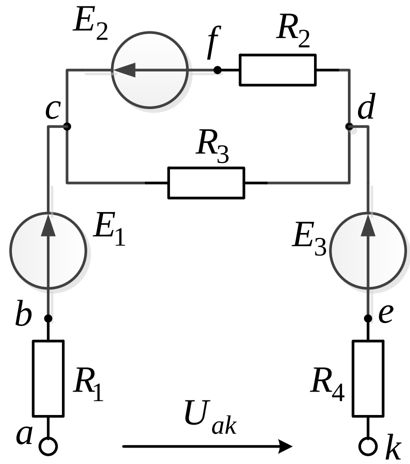


Рис. 1.6

Решение

Рассчитаем ток в контуре $cfdc$.

$$I = \frac{E_2}{R_2 + R_3} = \frac{4}{8 + 2} = 0{,}4 \text{ А}.$$

Потенциал точки k примем равным 0, тогда:

$$\varphi_e = \varphi_k = 0, \qquad \varphi_d = \varphi_e + E_3 = 0 + 24 = 24 \text{ В},$$

$$\varphi_c = \varphi_d + I \cdot R_3 = 24 + 0{,}4 \cdot 2 = 24{,}8 \text{ В},$$

$$\varphi_b = \varphi_c - E_1 = 24{,}8 - 2 = 22{,}8 \text{ В}, \qquad \varphi_a = \varphi_b = 22{,}8 \text{ В},$$

$$U_{ak} = \varphi_a - \varphi_k = 22{,}8 - 0 = 22{,}8 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{ak} = 22{,}8$ В.

Задача 1.5

Потенциалы узлов электрической цепи, изображенной на рис. 1.7, равны: $\varphi_a = 0$, $\varphi_b = 67$ В, $\varphi_c = 79$ В. Источники ЭДС $E_1 = 80$ В, $E_3 = 70$ В. Сопротивления резисторов $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 12$ Ом.

Определить токи в ветвях, построить потенциальную диаграмму.

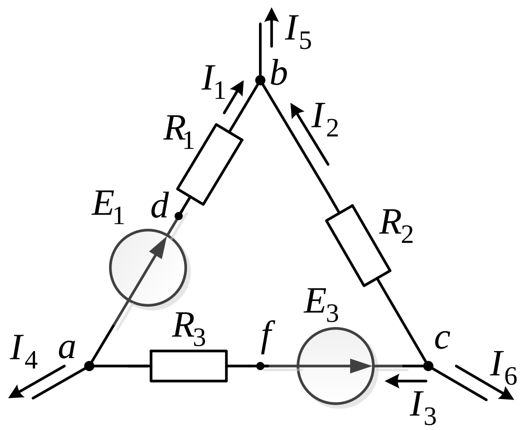


Рис. 1.7

Решение

Вычислим напряжение между каждой парой узлов:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = 0 - 67 = -67 \text{ В},$$

$$U_{cb} = \varphi_c - \varphi_b = 79 - 67 = 12 \text{ В},$$

$$U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a = 79 - 0 = 79 \text{ В}.$$

Применяя закон Ома, находим токи I_1, I_2, I_3:

$$I_1 = \frac{U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-67 + 80}{5} = 2{,}60 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U_{cb}}{R_2} = \frac{12}{10} = 1{,}20 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{U_{ca} - E_3}{R_3} = \frac{79 - 70}{12} = 0{,}75 \text{ А}.$$

Токи I_4, I_5, I_6 находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_4 = I_3 - I_1 = 0{,}75 - 2{,}6 = -1{,}85 \text{ А},$$

$$I_5 = I_1 + I_2 = 2{,}6 + 1{,}2 = 3{,}8 \text{ А},$$

$$I_6 = -I_2 - I_3 = -1{,}2 - 0{,}75 = -1{,}95 \text{ А}.$$

Построим потенциальную диаграмму для контура $adbcfa$. Для этого необходимо определить потенциалы точек d и f:

$$\varphi_d = \varphi_a + E_1 = 0 + 80 = 80 \text{ В},$$

$$\varphi_f = \varphi_c - E_3 = 79 - 70 = 9 \text{ В}.$$

В качестве точки отсчета выберем точку a с потенциалом $\varphi_a = 0$ В. Потенциал следующей точки d $\varphi_d = 65$ В, приращение сопротивления на участке $a - d$ равно нулю вследствие того, что здесь включен идеальный источник ЭДС. На диаграмме этому участку соответствует вертикальный отрезок.

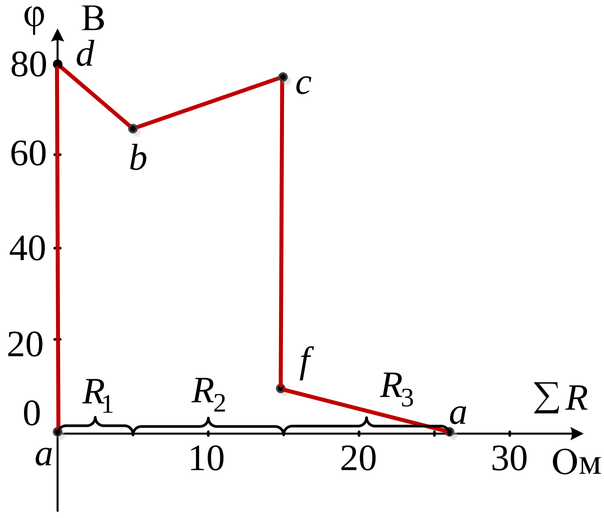


Рис. 1.8

Между точками d и b включен резистор с сопротивлением $R_1 = 5$ Ом. Ордината точки b равна потенциалу узла b ($\varphi_b = 67$ В), а абсцисса – $R_1 = 5$ Ом. На участке $b - c$ включен резистор с сопротивлением R_2, следовательно, абсцисса точки c равна $R_1 + R_2 = 15$ Ом, а ордината $\varphi_c = 79$ В.

Участку $c - f$ с идеальным источником ЭДС E_3 соответствует вертикальный отрезок потенциальной диаграммы. Причем $\varphi_f = 9$ В.

На участке $f - a$ включен резистор с сопротивлением R_3. Следовательно, ордината последней точки диаграммы, точки a, равна $\varphi_a = 0$, а абсцисса – $R_1 + R_2 + R_3 = 27$ Ом.

Ответ: $I_1 = 2{,}60$ А, $I_2 = 1{,}2$ А, $I_3 = 0{,}75$ А, $I_4 = -1{,}85$ А, $I_5 = 3{,}80$ А, $I_6 = -1{,}95$ А.

Задача 1.6

Дано: E = 20 В, J = 2 А, R_1 = 15 Ом, R_2 = 85 Ом.

Определить токи в ветвях электрической цепи, изображенной на рис. 1.9, и проверить баланс мощностей. Записать баланс мощностей для цепи, в которой источник тока преобразован в эквивалентный источник ЭДС E_J.

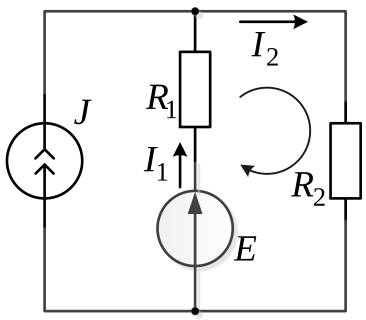


Рис. 1.9

Решение

1. Выберем положительные направления токов в ветвях электрической схемы. Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} J + I_1 - I_2 = 0, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = E. \end{cases}$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -2, \\ 15 I_1 + 85 I_2 = 20, \end{cases}$$

получим токи: $I_1 = -1{,}5$ А, $I_2 = 0{,}5$ А.

Для расчета баланса мощностей необходимо определить напряжение на зажимах источника тока:

$$U_J = U_2 = I_2 R_2 = 0{,}5 \cdot 85 = 42{,}5 \text{ В}.$$

Мощность источника тока:

$$P_J = J \cdot U_2 = 2 \cdot 42{,}5 = 85 \text{ Вт}.$$

Мощность источника ЭДС:

$$P_E = E \cdot I_1 = 20 \cdot (-1{,}5) = -30 \text{ Вт}.$$

Мощность источников:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_E + P_J = (-30) + 85 = 55 \text{ Вт}.$$

Мощность приемников:

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = (-1{,}5)^2 \cdot 15 + (0{,}5)^2 \cdot 85 = 55 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей выполняется.

2. Составим баланс мощностей для цепи, в которой источник тока преобразован в эквивалентный источник ЭДС (рис. 1.10):

$$E_J = J \cdot R_2 = 2 \cdot 85 = 170 \text{ В},$$

ток в цепи

$$I_1 = \frac{E - E_J}{R_2 + R_1} = \frac{20 - 170}{85 + 15} = -1{,}5 \text{ А}.$$

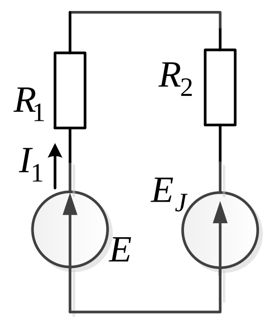


Рис. 1.10

Мощность источников:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_E + P_{E_J} = E \cdot I_1 - E_J \cdot I_1 = 20 \cdot (-1{,}5) - 170 \cdot (-1{,}5) = 225 \text{ Вт}.$$

Мощность приемников:

$$P_R = I_1^2 (R_1 + R_2) = (-1{,}5)^2 \cdot (15 + 85) = 225 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается. Заметим, что в эквивалентной схеме мощности источников и приемников увеличились. Следовательно, эквивалентность преобразований в отношении мощностей не соблюдается.

Ответ: 1. $I_1 = -1{,}5$ А, $I_2 = 0{,}5$ А, $P_{\text{ИСТ}} = P_R = 55$ Вт;

2. $I_1 = -1{,}5$ А, $P_{\text{ИСТ}} = P_R = 255$ Вт.

Задача 1.7

Найти токи в электрической цепи, приведенной на рис. 1.11. Проверить условие баланса мощностей. Определить напряжение между выделенными точками A и B.
$R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 0{,}3$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $E_1 = 15$ В, $E_4 = 20$ В, $J = 14$ А.

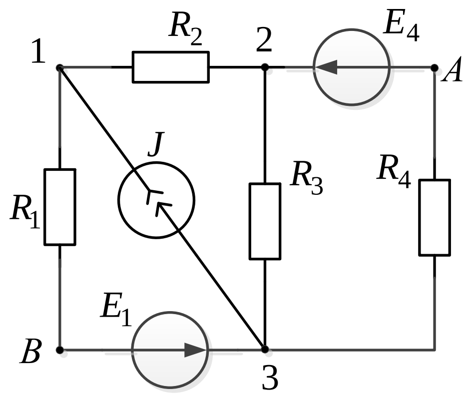


Рис. 1.11

Решение

Выберем условные положительные направления токов в ветвях (рис. 1.12) и запишем уравнения по законам Кирхгофа.

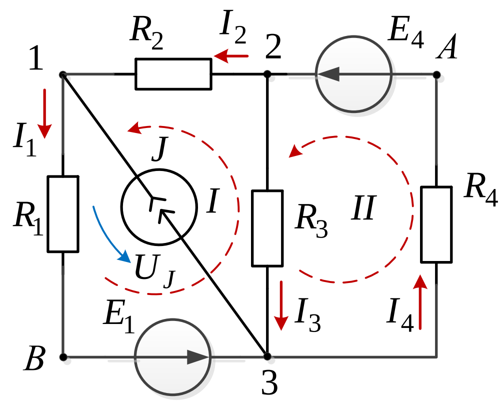


Рис. 1.12

Поскольку число ветвей с искомыми токами $n_B - n_J = 4$, необходимо составить четыре уравнения. По *первому закону Кирхгофа* составляем $n_У - 1 = 3 - 1 = 2$ уравнения, где $n_У = 3$ – общее число узлов:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + J = 0, \\ -I_2 - I_3 + I_4 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} I_1 - I_2 = J, \\ -I_2 - I_3 + I_4 = 0. \end{cases}$$

Остальные уравнения составим по второму закону Кирхгофа. Выбранные независимые контуры и направления их обхода показаны штриховыми линиями на рис. 1.12.

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_1, \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_4. \end{cases}$$

После подстановки числовых значений получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = 14, \\ -I_2 - I_3 + I_4 = 0, \\ 0{,}5 \cdot I_1 + 0{,}3 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 = 15, \\ 3 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 20. \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующий результат:

$$I_1 = 24 \text{ А}, \quad I_2 = 10 \text{ А}, \quad I_3 = 0 \text{ А}, \quad I_4 = 10 \text{ А}.$$

Проверим выполнение баланса мощностей:

$$P_E + P_J = P_R.$$

Мощности источников ЭДС:

$$P_E = P_{E1} + P_{E4} = E_1 I_1 + E_4 I_4 = 15 \cdot 24 + 20 \cdot 10 = 560 \text{ Вт}.$$

Для расчета мощности источника тока необходимо определить напряжение на его зажимах:

$$U_J = U_3 - U_2 = R_3 I_3 - R_2 I_2 = 3 \cdot 0 - 0{,}3 \cdot 10 = 0 - 3 = -3 \text{ В},$$

$$P_J = U_J \cdot J = -3 \cdot 14 = -42 \text{ Вт},$$

$$P_E + P_J = 560 + (-42) = 518 \text{ Вт}.$$

Мощность, потребляемая приемниками:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 0{,}5 \cdot 24^2 + 0{,}3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 10^2 = 518 \text{ Вт}.$$

Как видим, условие баланса мощностей выполняется.

Вычислим напряжение U_{AB}. Для этого составим уравнение по второму закону Кирхгофа для любого контура, включающего мысленный путь из точки A к точке B. Например (см. рис. 1.12),

$$U_{AB} + R_4 I_4 = E_1, \quad \text{откуда } U_{AB} = E_1 - R_4 I_4 = 15 - 2 \cdot 10 = -5 \text{ В}.$$

Для контроля полученного результата запишем еще одно уравнение, например для контура, включающего источники ЭДС и третью ветвь:

$$U_{AB} = E_1 - E_4 + R_3 I_3 = 15 - 20 + 3 \cdot 0 = -5 \text{ В}.$$

Как и следовало ожидать, оба результата совпали.

Ответ: $I_1 = 24$ А, $I_2 = 10$ А, $I_3 = 0$ А, $I_4 = 10$ А, $U_{AB} = -5$ В,

$P_{\text{ИСТ}} = P_R = 518$ Вт.

Задача 1.8

Найти токи и напряжения в электрической цепи с зависимыми источниками (рис. 1.13). Проверить условие баланса мощностей.

$R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $J_2 = 3$ А, $E_5 = 15$ В.

Зависимые источники:

$E_4 = 13 \cdot I_3$, $J_1 = 1{,}1 \cdot I_2$,

$E_6 = \dfrac{5}{3} U_1$, $J_4 = 1 \cdot U_2$.

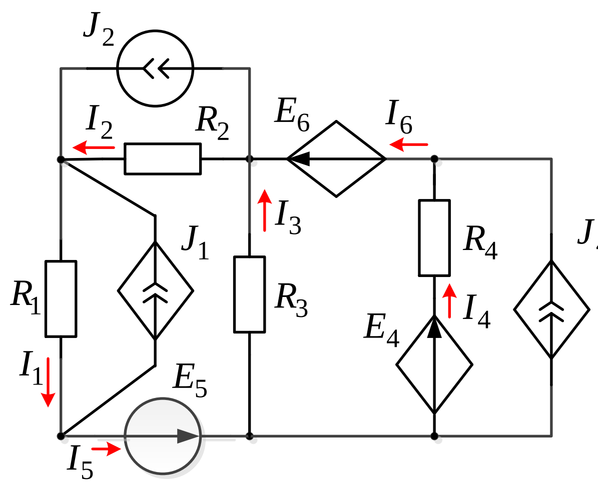


Рис. 1.13

Решение

В данной схеме используются четыре зависимых источника, величина напряжения или тока которых зависит от напряжения или тока на каком-то участке схемы. Так, источник E_4 является источником напряжения, управляемым током (ИНУТ), источник E_6 – источником напряжения, управляемым напряжением (ИНУН). Источник тока J_1 является источником тока, управляемым током (ИТУТ), а источник тока J_4 является источником тока, управляемым напряжением (ИТУН).

Вначале составим уравнения цепи, полагая все источники независимыми. С учетом принятых направлений токов ветвей уравнения цепи примут следующий вид:

по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + J_1 + J_2 = 0, \\ I_1 - I_5 - J_1 = 0, \\ -I_2 + I_3 + I_6 - J_2 = 0, \\ I_4 - I_6 + J_4 = 0, \end{cases}$$

по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_5, \\ -R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_4 + E_6. \end{cases}$$

Далее, учитывая соотношения для зависимых источников,

$$\text{ИНУТ:}\qquad E_4 = 13 \cdot I_3,$$

$$\text{ИТУТ:}\qquad J_1 = 1{,}1 \cdot I_2,$$

$$\text{ИНУН:}\qquad E_6 = \frac{5}{3}U_1 = \frac{5}{3}R_1 I_1 = \frac{5}{3}\cdot 5 \cdot I_1 = \frac{25}{3} I_1,$$

$$\text{ИТУН:}\qquad J_4 = 1 \cdot U_2 = 1 \cdot R_2 I_2 = 3 \cdot I_2,$$

полученную по законам Кирхгофа систему уравнений перепишем в виде:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + 1{,}1 \cdot I_2 + J_2 = 0, \\ I_1 - I_5 - 1{,}1 \cdot I_2 = 0, \\ -I_2 + I_3 + I_6 - J_2 = 0, \\ I_4 - I_6 + 3 \cdot I_2 = 0, \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_5, \\ -R_3 I_3 + R_4 I_4 = \dfrac{25}{3} I_1 + 13 \cdot I_3. \end{cases}$$

После переноса слагаемых с неизвестными токами в левую часть уравнения и подстановки числовых значений сопротивлений и независимых источников ЭДС и тока получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -I_1 + 2{,}1 \cdot I_2 = -3, \\ I_1 - 1{,}1 \cdot I_2 - I_5 = 0, \\ -I_2 + I_3 + I_6 = 3, \\ I_4 - I_6 + 3 \cdot I_2 = 0, \\ 5 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 8 \cdot I_3 = 15, \\ -\dfrac{25}{3} \cdot I_1 - 21 \cdot I_3 + 4 \cdot I_4 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим токи:

$$I_1 = 4{,}636 \text{ А},\ I_2 = 0{,}779 \text{ А},\ I_3 = -1{,}315 \text{ А},\ I_4 = 2{,}757 \text{ А},$$

$$I_5 = 3{,}779 \text{ А},\ I_6 = 5{,}094 \text{ А}.$$

Для проверки условия баланса мощностей в цепи запишем токи всех источников ЭДС и определим напряжения всех источников тока

$$E_5 = 15 \text{ В}, \qquad I_5 = 3{,}779 \text{ А};$$

$$E_6 = \frac{5}{3}U_1 = \frac{5}{3}R_1 I_1 = \frac{5}{3}\cdot 5 \cdot 4{,}636 = 38{,}633 \text{ В}, \qquad I_6 = 5{,}094 \text{ А};$$

$$E_4 = 13 \cdot I_3 = 13 \cdot (-1{,}315) = -17{,}095 \text{ В}, \qquad I_4 = 2{,}757 \text{ А};$$
$$J_1 = 1{,}1 \cdot I_2 = 1{,}1 \cdot 0{,}779 = 0{,}857 \text{ А}, \qquad U_{J1} = R_1 I_1 = 5 \cdot 4{,}636 = 23{,}180 \text{ В};$$
$$J_2 = 3 \text{ А}, \qquad U_{J2} = -R_2 I_2 = -3 \cdot 0{,}779 = -2{,}337 \text{ В};$$
$$J_4 = 1 \cdot U_2 = 1 \cdot R_2 I_2 = 1 \cdot 3 \cdot 0{,}779 = 2{,}337 \text{ А},$$
$$U_{J4} = -R_4 I_4 + E_4 = -4 \cdot 2{,}757 + 13 \cdot (-1{,}315) = -28{,}153 \text{ В}.$$

Мощность, вырабатываемая источниками энергии:

$$P_{\text{ИСТ}} = \sum_k E_k I_k + \sum_q J_q U_{Jq} = E_5 I_5 + E_6 I_6 + E_4 I_4 + J_1 U_{J1} + J_2 U_{J2} + J_4 U_{J4} =$$
$$= 15 \cdot 3{,}779 + 38{,}633 \cdot 5{,}094 + (-17{,}095) \cdot 2{,}757 + 0{,}857 \cdot 23{,}180 + 3 \cdot (-2{,}337) +$$
$$+ 2{,}337 \cdot (-28{,}123) = 153{,}480 \text{ Вт}.$$

Мощность, потребляемая приемниками:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 5 \cdot (4{,}636)^2 + 3 \cdot (0{,}779)^2 + 8 \cdot (-1{,}315)^2 +$$
$$+ 4 \cdot (2{,}757)^2 = 153{,}521 \text{ Вт}.$$

Условие баланса мощностей ($P_R = P_{\text{ИСТ}}$) выполняется.

Ответ: $I_1 = 4{,}636$ А, $I_2 = 0{,}779$ А, $I_3 = -1{,}315$ А, $I_4 = 2{,}757$ А, $I_5 = 3{,}779$ А, $I_6 = 5{,}094$ А, $P_{\text{ИСТ}} = P_R = 153{,}5$ Вт.

Задача 1.9

Аккумулятор с ЭДС, равной 2 В, и внутренним сопротивлением 0,02 Ом включен в участок цепи, ток в котором равен 20 А. Участок электрической цепи со схемой замещения аккумулятора изображен на рис. 1.14.

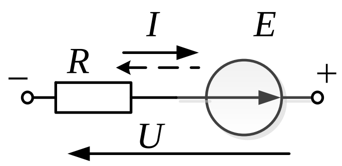


Рис. 1.14

Найти напряжение на зажимах аккумулятора в двух случаях:

1) когда направления ЭДС и тока совпадают – режим источника электрической энергии;

2) когда их направления противоположны – режим зарядки аккумулятора.

Ответ: 1) 1,6 В; 2) 2,4 В.

Задача 1.10

Пользуясь законом Ома для участка цепи и первым законом Кирхгофа, определить токи в ветвях электрической цепи, изображенной на рис. 1.15, если амперметр показывает ток 8 А, а $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $R_6 = 6$ Ом, $E_1 = 120$ В, $E_4 = 6$ В, $E_6 = 80$ В.

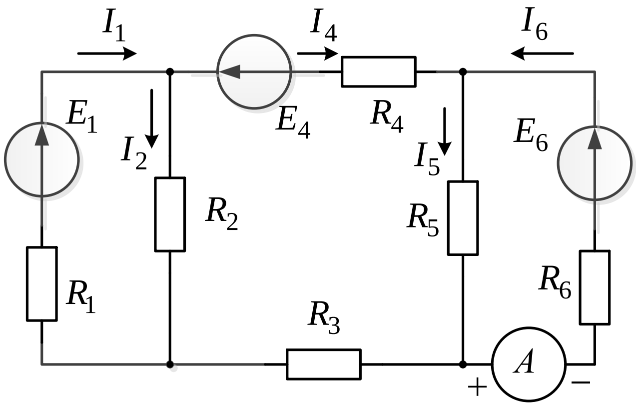


Рис. 1.15

Ответ: 21 А, 13 А, 8 А, 16 А.

Задача 1.11

Найти ток I_1 в цепи, схема которой изображена на рис. 1.16, если $E = 40$ В, $J = 2$ А, $R = 100$ Ом.

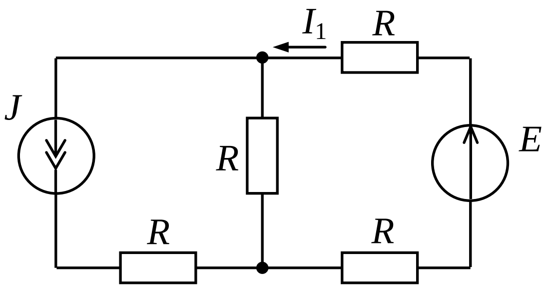


Рис. 1.16

Ответ: $I_1 = 0{,}8$ А.

Задача 1.12

Найти токи и напряжения в электрической цепи с зависимыми источниками (рис. 1.17). Проверить условие баланса мощностей.

$R_1 = 0{,}5$ Ом, $R_2 = 0{,}3$ Ом,

$R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $E_1 = 25$ В,

$E_2 = 7I_3$, $E_3 = 10$ В, $E_4 = 10$ В,

$J = 0{,}7U_{R4}$.

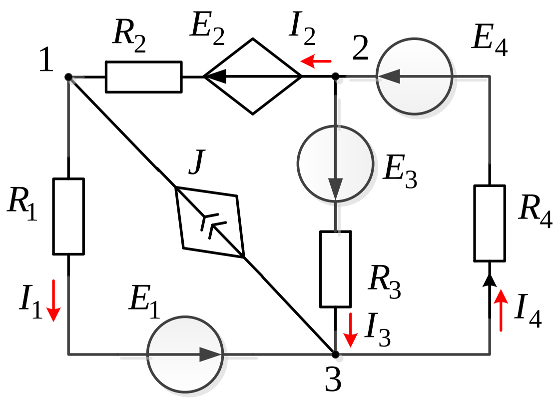


Рис. 1.17

Ответ: $I_1 = 24$ А, $I_2 = 10$ А, $I_3 = 0$ А, $I_4 = 10$ А,

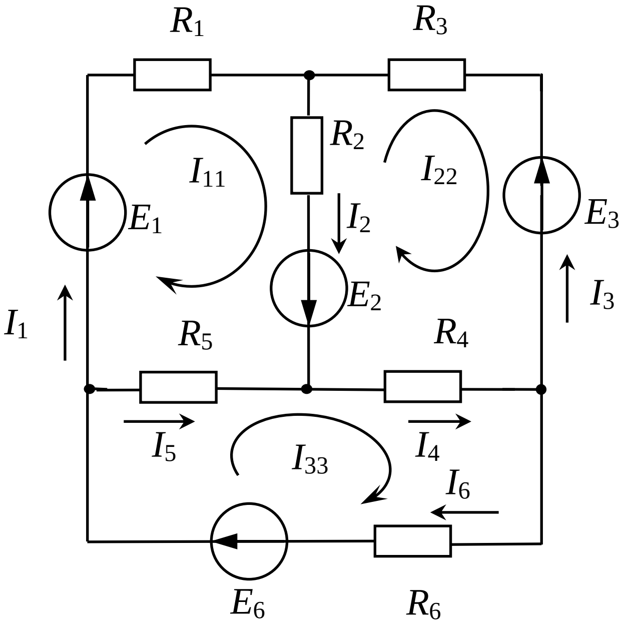
$P_{\text{ИСТ}} = P_R = 518$ Вт.

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

2.1. Краткие теоретические сведения

Метод контурных токов

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22}; \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}, \end{cases}$$



где

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5; \quad R_{12} = R_{21} = -R_2;$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4; \quad R_{23} = R_{32} = -R_4;$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6; \quad R_{13} = R_{31} = -R_5;$$

$$E_{11} = E_1 + E_2;$$

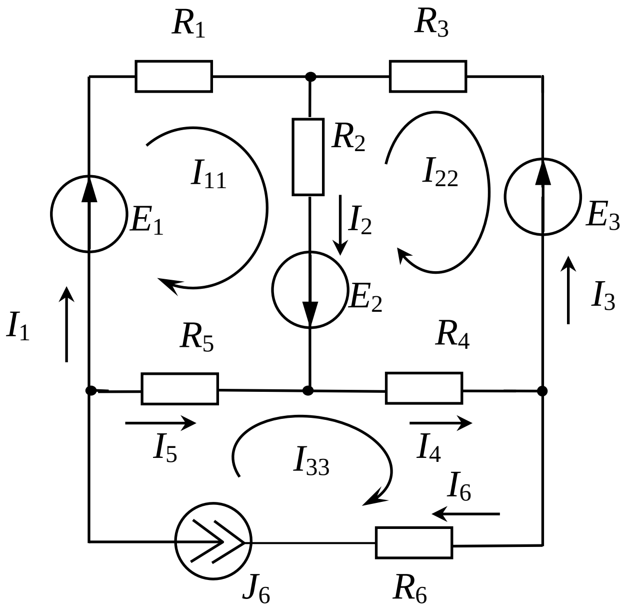
$$E_{22} = -E_2 - E_3;$$

$$E_{33} = E_6.$$

$$I_1 = I_{11}; \qquad I_4 = I_{33} - I_{22};$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22}; \qquad I_5 = I_{33} - I_{11};$$

$$I_3 = -I_{22}; \qquad I_6 = I_{33}.$$



$$\begin{cases} I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}+I_{33}R_{13}=E_{11}; \\ I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}+I_{33}R_{23}=E_{22}; \\ I_{33}=-J_6, \end{cases}$$

где

$$R_{11}=R_1+R_2+R_5; \quad R_{12}=R_{21}=-R_2;$$

$$R_{22}=R_2+R_3+R_4; \quad R_{23}=-R_4;$$

$$R_{13}=-R_5;$$

$$E_{11} = E_1 + E_2; \quad E_{22} = -E_2 - E_3;$$

$$I_1 = I_{11}; \qquad I_4 = I_{33} - I_{22} = -J_6 - I_{22};$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_5 = I_{33} - I_{11} = -J_6 - I_{11};$$

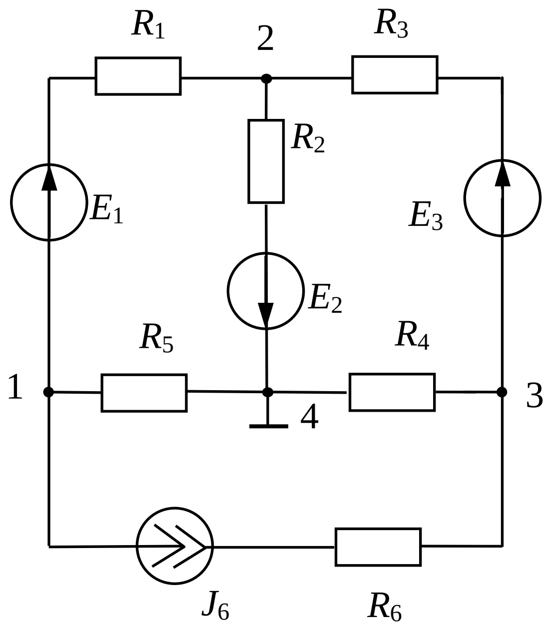
$$I_3 = -I_{22}; \qquad I_6 = I_{33} = -J_6.$$

Метод узловых потенциалов

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \ldots + \varphi_{(n-1)} G_{1,n-1} = J_{11}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \ldots + \varphi_{(n-1)} G_{2,n-1} = J_{22}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1 G_{n-1,1} + \varphi_2 G_{n-1,2} + \ldots + \varphi_{(n-1)} G_{n-1,n-1} = J_{(n-1),(n-1)}; \\ \varphi_n = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{11}; \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = J_{22}; \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = J_{33}; \end{cases}$$

$$\varphi_4 = 0.$$



$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}; \qquad G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_1};$$

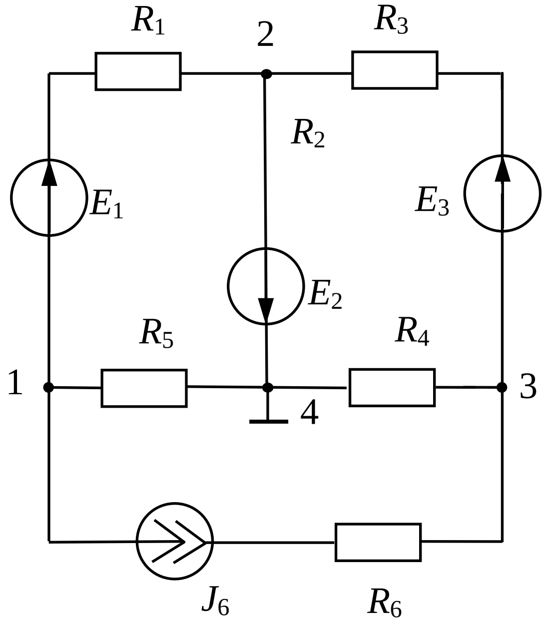
$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; \quad G_{13} = G_{31} = 0;$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}; \qquad G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_3};$$

$$J_{11} = -\frac{E_1}{R_1} - J_6; \qquad J_{22} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3};$$

$$J_{33} = -\frac{E_3}{R_3} + J_6.$$

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{11}; \\ \varphi_2 = -E_2; \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = J_{33}. \end{cases}$$

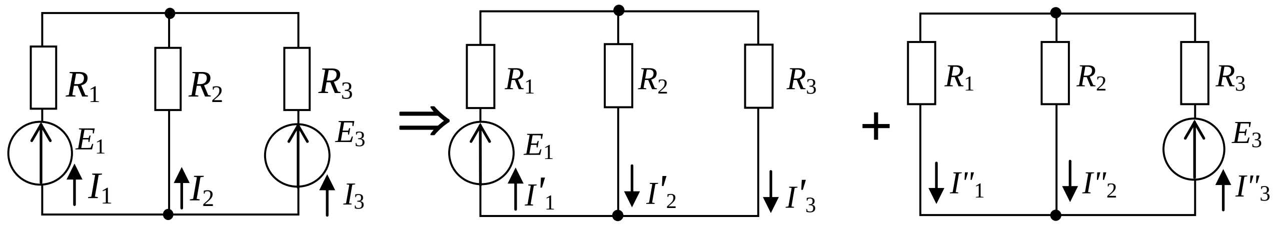


$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}; \qquad G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4};$$

$$G_{12} = -\frac{1}{R_1}; \quad G_{13} = G_{31} = 0; \quad G_{32} = -\frac{1}{R_3};$$

$$J_{11} = -\frac{E_1}{R_1} - J_6; \qquad J_{33} = -\frac{E_3}{R_3} + J_6.$$

Метод наложения



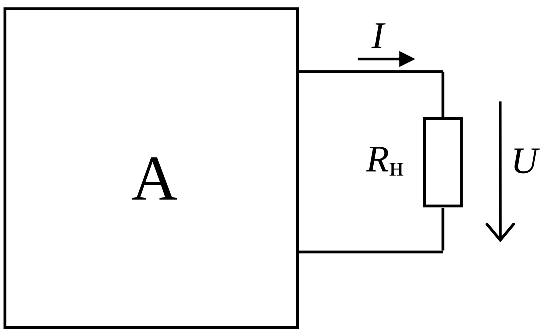
$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}, \qquad I_3'' = \frac{E_3}{R_3 + \dfrac{R_2 R_1}{R_2 + R_1}},$$

$$I_2' = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \qquad I_1'' = I_3'' \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

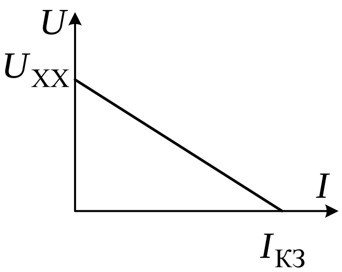
$$I_3' = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}, \qquad I_2'' = I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = -I_2' - I_2'', \quad I_3 = -I_3' + I_3''.$$

Метод эквивалентного генератора



$$I = \frac{E_{ЭГ}}{R_{ЭГ} + R_H}, \; U = \frac{J_{ЭГ}}{G_{ЭГ} + 1/R_{Н}}$$



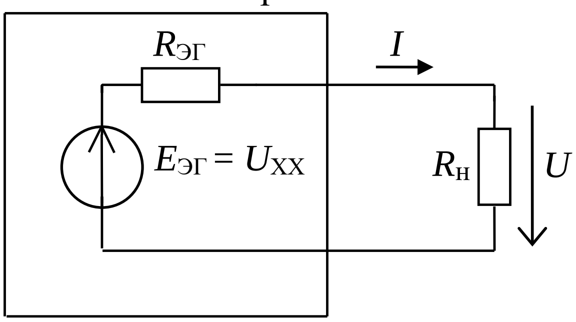
$$E_{ЭГ} = U_{XX}$$

$$R_{ЭГ} = \frac{U_{XX}}{I_{КЗ}}$$

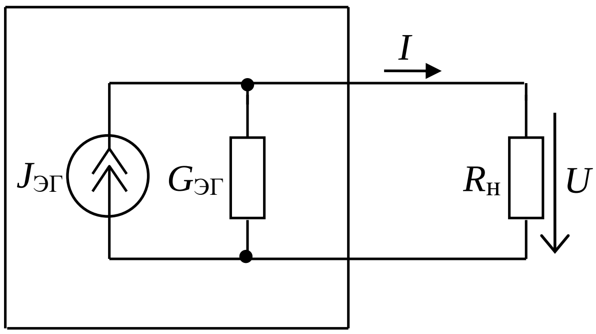
$$J_{ЭГ} = I_{КЗ}$$

$$G_{ЭГ} = \frac{I_{КЗ}}{U_{XX}}$$

Метод эквивалентного генератора напряжений

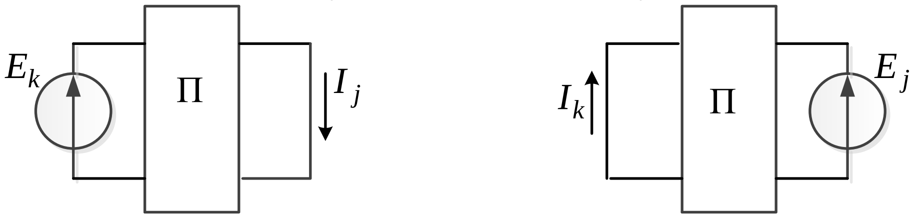


Метод эквивалентного генератора тока



Теорема взаимности

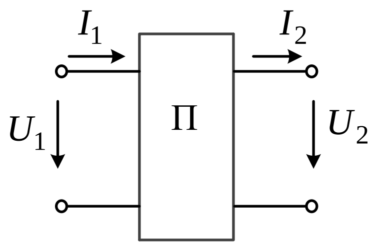
$I_j = I_k$, если $E_k = E_j$



Коэффициенты передачи

$$K_U = \frac{U_2}{U_1}, \quad K_I = \frac{I_2}{I_1}, \quad K_P = \frac{P_2}{P_1},$$

$$K_R = \frac{U_2}{I_1}, \quad K_G = \frac{I_2}{U_1}.$$



2.2. Примеры и задачи

Задача 2.1

Методами контурных токов и узловых потенциалов найти токи в ветвях электрической цепи, изображенной на рис. 2.1, если $E_1 = 100$ В, $E_2 = 30$ В, $E_3 = 10$ В, $E_4 = 6$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 15$ Ом.

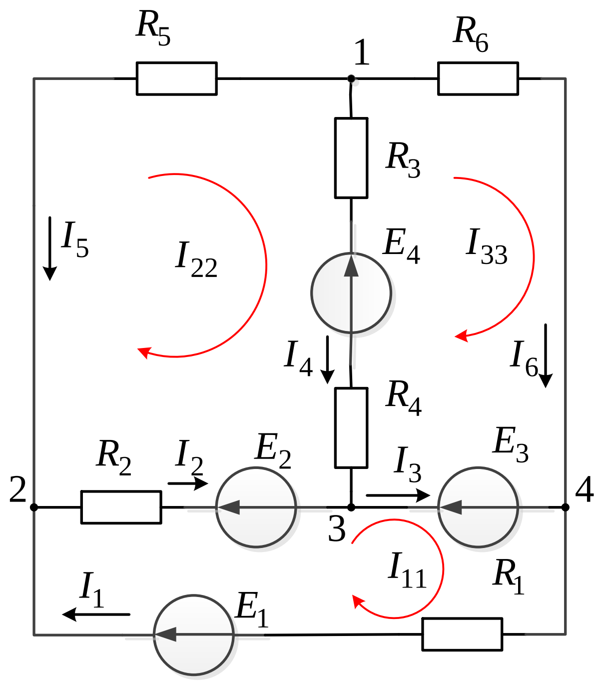


Рис. 2.1

Решение

1. Решим задачу методом контурных токов.

В схеме число ветвей $b = 6$, число узлов $y = 4$, число ветвей с источниками тока $b_J = 0$. Тогда $n_{II} = b - b_J - (y-1) = 6 - 0 - (4-1) = 3$ – количество уравнений, составленных по методу контурных токов для показанной на рис. 2.1 произвольно выбранной независимой системы контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33}:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}. \end{cases}$$

Собственные сопротивления контуров:

$R_{11} = R_1 + R_2 = 10 + 10 = 20$ Ом;

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 10 + 1 + 6 + 5 = 22$ Ом;

$R_{33} = R_3 + R_4 + R_6 = 1 + 6 + 15 = 22$ Ом.

Для общих сопротивлений между контурами имеем:

$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -10$ Ом;

$R_{23} = R_{32} = -(R_3 + R_4) = -(1 + 6) = -7$ Ом;

$R_{13} = R_{31} = 0$.

Далее определяем контурные ЭДС:

$E_{11} = E_1 - E_2 - E_3 = 100 - 30 - 10 = 60$ В;

$E_{22} = E_2 - E_4 = 30 - 6 = 24$ В;

$E_{33} = E_3 + E_4 = 10 + 6 = 16$ В.

После подстановки численных значений система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 20I_{11} - 10I_{22} = 60, \\ -10I_{11} + 22I_{22} - 7I_{33} = 24, \\ -7I_{22} + 22I_{33} = 16. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим значения контурных токов:

$$I_{11} = 5 \text{ А}, \qquad I_{22} = 4 \text{ А}, \qquad I_{33} = 2 \text{ А}.$$

В ветви с ЭДС E_1 ток I_1 имеет направление контурного тока I_{11} и поэтому

$$I_1 = I_{11} = 5 \text{ А}.$$

Аналогично в пятой и шестой ветвях:

$$I_5 = -I_{22} = -4 \text{ А}, \qquad I_6 = I_{33} = 2 \text{ А}.$$

Во второй ветви с сопротивлением R_2 ток I_2 равен алгебраической сумме контурных токов I_{11} и I_{22}:

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 5 - 4 = 1 \text{ А.}$$

Аналогично в третьей и четвертой ветвях:

$$I_3 = I_{11} - I_{33} = 5 - 2 = 3 \text{ А,}$$
$$I_4 = I_{22} - I_{33} = 4 - 2 = 2 \text{ А.}$$

2. Теперь решим эту задачу методом узловых потенциалов.

Между 3 и 4 узлами включена идеальная ЭДС E_3. Если заземлим один из этих узлов, например, узел 4, то $\varphi_3 = E_3 = 10$ В. Для определения потенциалов первого и второго узлов составим два уравнения:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = J_{11}, \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = J_{22}. \end{cases}$$

Собственные проводимости узлов:

$$G_{11} = \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{1+6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{43}{105} \text{ См,}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ См.}$$

Для общих проводимостей между узлами имеем:

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_5} = -\frac{1}{5} \text{ См,}$$

$$G_{13} = -\frac{1}{R_3 + R_4} = -\frac{1}{1+6} = -\frac{1}{7} \text{ См,}$$

$$G_{23} = -\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{10} \text{ См.}$$

Далее определяем узловые токи:

$$J_{11} = E_4\left(\frac{1}{R_3 + R_4}\right) = 6 \cdot \frac{1}{1+6} = \frac{6}{7} \text{ А,}$$

$$J_{22} = E_2 \frac{1}{R_2} + E_1 \frac{1}{R_1} = 30 \cdot \frac{1}{10} + 100 \cdot \frac{1}{10} = \frac{130}{10} \text{ А.}$$

После подстановки система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{43}{105}\varphi_1 - \frac{1}{5}\varphi_2 - \frac{10}{7} = \frac{6}{7}; \\ -\frac{1}{5}\varphi_1 + \frac{2}{5}\varphi_2 - \frac{10}{10} = \frac{130}{10}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $\varphi_1 = 30$ В, $\varphi_2 = 50$ В.

Найдем токи в ветвях, кроме тока I_3, по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = \frac{-50 + 100}{10} = 5 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_2}{R_2} = \frac{50 - 10 - 30}{10} = 1 \text{ А},$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 - 10 - 6}{7} = 2 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{30 - 50}{5} = -4 \text{ А},$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_6} = \frac{30}{15} = 2 \text{ А}.$$

Ток I_3 найдем из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа для третьего узла:

$$I_3 = I_2 + I_4 = 1 + 2 = 3 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 5$ А; $I_2 = 1$ А; $I_3 = 3$ А; $I_4 = 2$ А; $I_5 = -4$ А; $I_6 = 2$ А.

Задача 2.2

Найти ток I_1 методом эквивалентного генератора в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.1.

Решение

Найдем параметры эквивалентного генератора по отношению к первой ветви (рис 2.2).

В режиме холостого хода (рис. 2.3) найдем напряжение U_{42}. Для этого можно воспользоваться

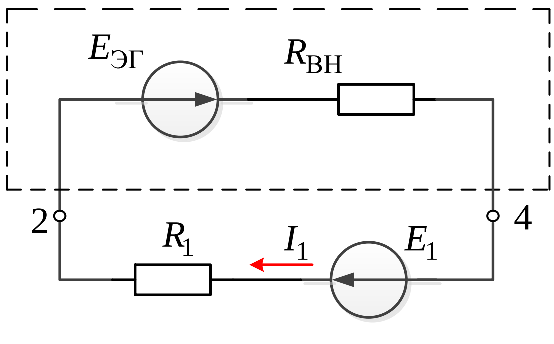


Рис. 2.2

системой уравнений, составленных по методу узловых потенциалов для данной схемы, если считать

$$\frac{1}{R_1}=0, \quad \frac{E_1}{R_1}=0, \quad \varphi_4=0.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_3+R_4}\right)-\varphi_2\frac{1}{R_5}-\varphi_3\frac{1}{R_3+R_4}=\frac{E_4}{R_3+R_4}; \\ -\varphi_1\frac{1}{R_5}+\varphi_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_3\frac{1}{R_2}=\frac{E_2}{R_2}; \\ \varphi_3=E_3=10\text{ В.} \end{cases}$$

Подставим численные значения

$$\begin{cases} \frac{43}{105}\varphi_1-\frac{1}{5}\varphi_2=\frac{16}{7}, \\ -\frac{1}{5}\varphi_1+\frac{3}{10}\varphi_2=4 \end{cases}$$

и найдем значения потенциалов:

$$\varphi_1=\frac{520}{29}=17{,}93\text{ В},$$

$$\varphi_2=\frac{2200}{87}=25{,}287\text{ В}.$$

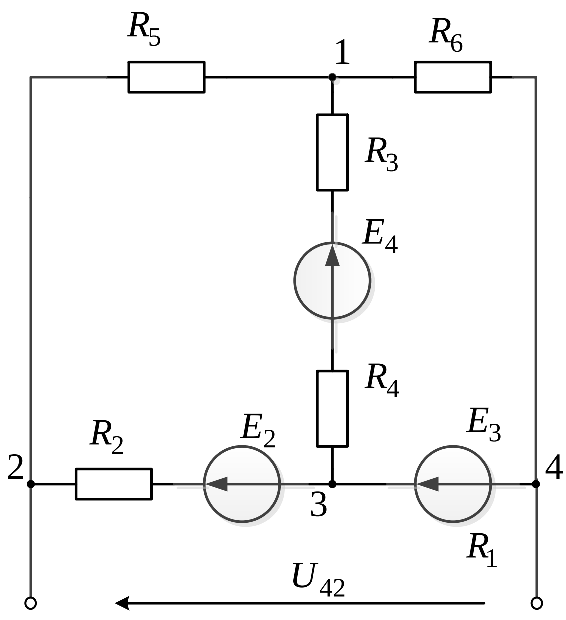


Рис. 2.3

Как видно из схемы

$$E_{ЭГ}=U_{42}=\varphi_4-\varphi_2=0-25{,}29=-25{,}287\text{ В}.$$

Сопротивление $R_{вн}$ определяется по схеме, приведенной на рис. 2.4, в которой источники ЭДС закорочены.

$$R_{вн}=R_{ab}=\frac{R_2\left(R_5+\dfrac{R_6(R_3+R_4)}{R_6+R_3+R_4}\right)}{R_2+R_5+\dfrac{R_6(R_3+R_4)}{R_6+R_3+R_4}}=$$

$$=\frac{10\left(5+\dfrac{15(1+6)}{15+1+6}\right)}{10+5+\dfrac{15(1+6)}{15+1+6}}=\frac{430}{87}=4{,}94\ \text{Ом}.$$

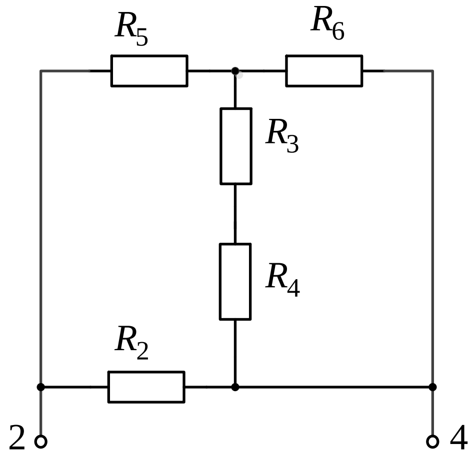


Рис. 2.4

Искомый ток находим по эквивалентной схеме замещения, изображенной на рис. 2.2.

$$I_1=\frac{E_{ЭГ}+E_1}{R_{вн}+R_1}=\frac{-25{,}287+100}{4{,}94+10}=5\text{А}.$$

Ответ: $I_1 = 5$ А.

Задача 2.3

Используя метод узловых потенциалов, определить все токи в электрической цепи, изображенной на рис. 2.5, если

$E_1=30$ В, $E_2=10$ В,
$E_3=200$ В, $J_4=7$ А,
$R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом,
$R_3=6$ Ом, $R_4=8$ Ом,
$R_5=15$ Ом, $R_6=40$ Ом,
$R_7=10$ Ом.

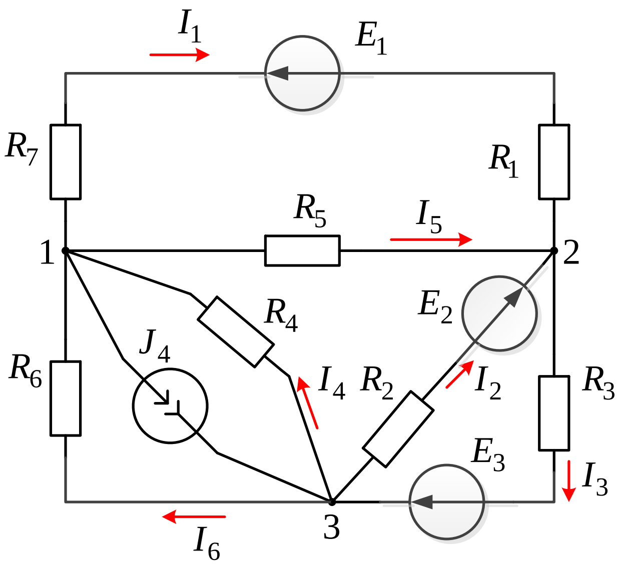


Рис. 2.5

Решение

Приняв потенциал третьего узла равным нулю, запишем уравнения для потенциалов двух других узлов:

$$\begin{cases}\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} = J_{11};\\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} = J_{22},\end{cases}$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + R_7} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{20+10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{40} = 0{,}25 \text{ См},$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1 + R_7} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20+10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{6} = 0{,}3 \text{ См},$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_1 + R_7} - \frac{1}{R_5} = -\frac{1}{20+10} - \frac{1}{15} = -0{,}1 \text{ См},$$

$$J_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_7} - J_4 = \frac{30}{20+10} - 7 = -6 \text{ А},$$

$$J_{22} = -\frac{E_1}{R_1 + R_7} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} = -\frac{30}{20+10} + \frac{10}{30} - \frac{200}{60} = -34 \text{ А}.$$

После подстановки числовых значений система узловых уравнений примет вид:

$$\begin{cases}0{,}25\varphi_1 - 0{,}1\varphi_2 = -6{,}0,\\ -0{,}1\varphi_1 + 0{,}3\varphi_2 = -34{,}0.\end{cases}$$

Решение системы уравнений дает следующие значения узловых потенциалов:

$$\varphi_1 = -80 \text{ В}, \ \varphi_2 = -140 \text{ В}.$$

Применяя закон Ома для каждой ветви, определим искомые токи:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_1}{R_1 + R_7} = \frac{-80 - (-140) - 30}{20+10} = 1 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{0 - (-140) + 10}{30} = 5 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-140 + 200}{6} = 10 \text{ А},$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{0 - (-80)}{8} = 10 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{-80 - (-140)}{15} = 4 \text{ А},$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_6} = \frac{0-(-80)}{40} = 2 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 1$ А; $I_2 = 5$ А; $I_3 = 10$ А; $I_4 = 10$ А; $I_5 = 4$ А; $I_6 = 2$ А.

Задача 2.4

Определить токи в электрической цепи, изображенной на рис. 2.6, методами контурных токов и узловых потенциалов и проверить выполнение баланса мощностей, если $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $E_1 = 4$ В, $E_2 = 16$ В, $J = 1$ А.

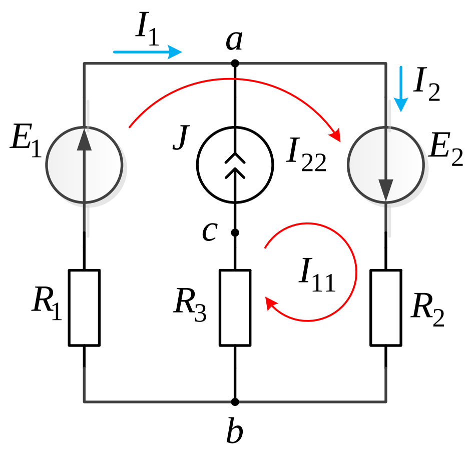


Рис. 2.6

Решение

1. Решим задачу методом контурных токов.

Контурный ток I_{11} равен току источника тока

$$I_{11} = J = 1 \text{ А}.$$

Положительное направление контурного тока I_{22} выберем по часовой стрелке, тогда уравнение для второго контура примет вид:

$$I_{11}R_2 + I_{22}(R_1 + R_2) = E_1 + E_2.$$

После подстановки числовых значений получим

$$I_{22}(2+8) = 4 + 16 - 1 \cdot 8,$$

откуда

$$I_{22} = 1{,}2 \text{ А}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = I_{22} = 1{,}2 \text{ А};$$

$$I_2 = I_{11} + I_{22} = 1 + 1{,}2 = 2{,}2 \text{ А}.$$

Для определения мощности источника тока рассчитаем напряжение U_{ac} на его зажимах с помощью уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для второго контура

$$I_2R_2 + JR_3 - U_{ac} = E_2,$$

откуда

$$U_{ac} = -E_2 + I_2R_2 + JR_3 = -16 + 2{,}2 \cdot 8 + 1 \cdot 5 = 6{,}6 \text{ В}.$$

Мощность источника тока:

$$P_J = JU_{ac} = 1 \cdot 6{,}6 = 6{,}6 \text{ Вт}.$$

Мощности источников ЭДС:

$$P_{E1} = E_1 I_1 = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8 \text{ Вт},$$
$$P_{E2} = E_2 I_2 = 16 \cdot 2{,}2 = 35{,}2 \text{ Вт}.$$

Мощность, выделяемая всеми источниками:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_J + P_{E1} + P_{E2} = 6{,}6 + 4{,}8 + 35{,}2 = 46{,}6 \text{ Вт}.$$

Мощность приемников:

$$P_{\text{ПР}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + J^2 R_3 = (1{,}2)^2 \cdot 2 + (2{,}2)^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 5 = 46{,}6 \text{ Вт}.$$

Баланс соблюдается: $P_{\text{ПР}} = P_{\text{ИСТ}}$.

2. Теперь проведем расчет схемы методом узловых потенциалов, для чего заземлим узел b ($\varphi_b = 0$).

Тогда уравнение для узла a примет вид:

$$\varphi_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J;$$

$$\varphi_a = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{16}{8} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{В}.$$

По закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_b - \varphi_a + E_1}{R_1} = \frac{-1{,}6 + 4}{2} = 1{,}2 \text{ А};$$

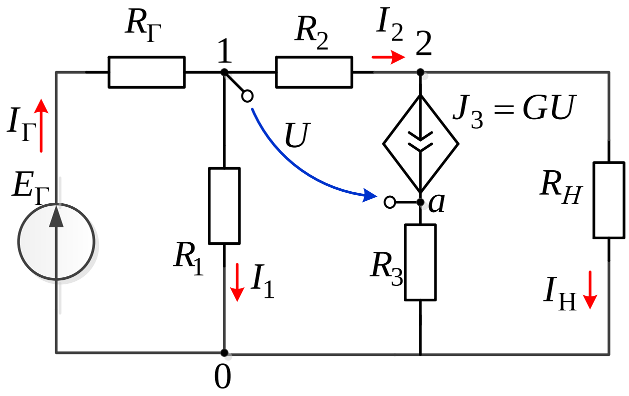
$$I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_2}{R_2} = \frac{1{,}6 + 16}{8} = 2{,}2 \text{А}.$$

Ответ: $I_1 = 1{,}2$ А; $I_2 = 2{,}2$ А; $P_{\text{ист}} = 46{,}6$ Вт; $P_{\text{пр}} = 46{,}6$ Вт.

Задача 2.5

Рассчитать все токи в ветвях электрической цепи (рис. 2.7), определить коэффициенты передачи по току $K_I = \frac{I_{\text{Н}}}{I_{\text{Г}}}$, напряжению

$K_U = \dfrac{U_{\text{Н}}}{E_{\Gamma}}$, мощности $K_P = \dfrac{P_2}{P_1}$ от генератора к нагрузке и входное сопротивление относительно генераторных зажимов. Расчет выполнить с помощью методов узловых потенциалов и контурных токов.



$R_\Gamma = 2$ кОм, $R_1 = 25$ кОм,
$R_2 = 25$ кОм, $R_3 = 5$ кОм,
$R_{\text{Н}} = 10$ кОм, $E_\Gamma = 5$ В,
$G = 2{,}5$ мСм.

Рис. 2.7

Решение

1. Метод узловых потенциалов

Принимаем потенциал узла 0 равным нулю. Система узловых уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 = J_{11}, \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = J_{22}, \end{cases}$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_\Gamma} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = 0{,}58 \text{ мСм},$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{Н}}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{10} = 0{,}14 \text{ мСм},$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{25} = -0{,}04 \text{ мСм}.$$

$$J_{11} = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ мА},$$

$$J_{22} = -J_3 = -GU = -2{,}5 \cdot U \text{ мА}.$$

После подстановки найденных числовых значений получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,58\varphi_1 - 0,04\varphi_2 = 2,5, \\ -0,04\varphi_1 + 0,14\varphi_2 = -2,5U. \end{cases}$$

Полученная система уравнений кроме двух искомых потенциалов узлов φ_1 и φ_2 содержит также неизвестное управляющее напряжение U. Это напряжение необходимо выразить через потенциалы узлов. Для этого запишем уравнение Кирхгофа для мысленно замкнутого контура 1-*a*-0-1:

$$U + GUR_3 = \varphi_1 - \varphi_0.$$

Отсюда найдем

$$U = \frac{\varphi_1}{1+GR_3} = \frac{\varphi_1}{1+2,5\cdot 5} = 0,0741\cdot\varphi_1.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнения системы и группируя слагаемые, приведем систему к виду:

$$\begin{cases} 0,58\varphi_1 - 0,04\varphi_2 = 2,5, \\ 0,1452\varphi_1 + 0,14\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующий результат:

$$\varphi_1 = 4,02264 \text{ В}, \qquad \varphi_2 = -4,1716 \text{ В}.$$

Токи определяем по закону Ома:

$$I_{\Gamma} = \frac{\varphi_0 - \varphi_1 + E_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = \frac{0 - 4,0226 + 5}{2} = 0,4887 \text{ мА},$$

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{R_1} = \frac{4,0226}{25} = 0,1603 \text{ мА},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = \frac{4,0226 + 4,1716}{25} = 0,3277 \text{ мА},$$

$$I_{\text{Н}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_{\text{Н}}} = \frac{-4,1716}{10} = -0,4172 \text{ мА}.$$

Для управляемого источника тока J_3 найдем:

$$J_3 = GU = G\frac{\varphi_1}{1+GR_3} = \frac{2,5\cdot 4,0226}{1+2,5\cdot 5} = 0,7449 \text{ мА}.$$

Проверим выполнение условия баланса генерируемой и потребляемой мощности в цепи.

$$P_E + P_J = P_R.$$

Предварительно определим напряжение на зажимах источника тока:

$$U_J = -(\varphi_2 - \varphi_0) + J_3 R_3 = 4{,}1716 + 0{,}7449 \cdot 5 = 7{,}8961 \text{ В}.$$

Мощности источников:

$$P_{\text{ИСТ}} = P_E + P_J = E_\Gamma I_\Gamma + U_J J_3 = 5 \cdot 0{,}4887 + 7{,}8961 \cdot 0{,}7449 = 8{,}3253 \text{ мВт}.$$

Мощность, потребляемая приемниками:

$$P_R = \sum_{k=1}^{4} R_k I_k^2 = R_\Gamma I_\Gamma^2 + R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 J_3^2 + R_\text{Н} I_\text{Н}^2 = 2 \cdot (0{,}4887)^2 +$$

$$+ 25 \cdot (0{,}1603)^2 + 25 \cdot (0{,}3277)^2 + 5 \cdot (0{,}7448)^2 + 10 \cdot (0{,}4172)^2 = 8{,}319 \text{ мВт}.$$

Как видим, условие баланса мощности выполняется.

Сопротивление относительно генераторных зажимов:

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{E_\Gamma}{I_\Gamma} = \frac{5}{0{,}4887} = 10{,}2312 \text{ кОм}.$$

Коэффициент передачи по напряжению:

$$K_U = \frac{U_\text{Н}}{E_\Gamma} = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{E_\Gamma} = \frac{-4{,}1716}{5} = -0{,}8343.$$

Коэффициент передачи по току:

$$K_I = \frac{I_\text{Н}}{I_\Gamma} = \frac{-0{,}4172}{0{,}4887} = -0{,}8537.$$

Коэффициент передачи по мощности:

$$K_P = K_I K_U = (-0{,}8537) \cdot (-0{,}8343) = 0{,}7122.$$

2. Рассмотрим решение задачи методом контурных токов.

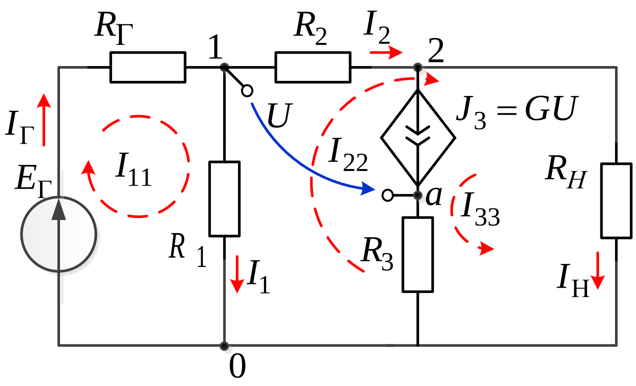


Рис. 2.8

Решение ищем относительно контурных токов, циркулирующих по независимым контурам (рис. 2.8). В рассматриваемой цепи два независимых контура с токами I_{11} и I_{22}.

В рассматриваемой цепи действует также источник тока J_3, который с параллельным к нему сопротивлением $R_\text{Н}$ может быть преобразован в источник ЭДС. Однако более общим способом является выделение дополнительного контура с контурным током, равным току источник тока $I_{33} = J_3$. Для этого контура уравнение не составляется.

Система контурных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ I_{33} = J_3 = GU, \end{cases}$$

где $R_{11} = R_{\Gamma} + R_1 = 2 + 25 = 27$ кОм;

$R_{22} = R_1 + R_2 + R_{\text{Н}} = 25 + 25 + 10 = 60$ кОм;

$R_{12} = R_{21} = -R_1 = -25$ кОм;

$R_{13} = R_{31} = 0$;

$R_{23} = R_{32} = -R_{\text{Н}} = -10$ кОм;

$E_{11} = E_{\Gamma} = 5$ В;

$E_{22} = 0$.

Контурный ток третьего контура равен $I_{33} = J_3 = GU = 2{,}5U$, тогда система контурных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 27I_{11} - 25I_{22} = 5, \\ -25I_{11} + 60I_{22} - 10I_{33} = 0, \\ I_{33} = 2{,}5U. \end{cases}$$

Выразим управляющее напряжение U через контурные токи. Для этого составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, включающего мысленный путь из точки *1* в точку *a*:

$$U = -J_3R_3 + I_1R_1 = -R_3I_{33} + (I_{11} - I_{22})R_1.$$

Отсюда

$$I_{33} = GU = GR_1I_{11} - GR_1I_{22} - GR_3I_{33}.$$

После подстановки численных значений последнее уравнение перепишется в виде:

$$62{,}5I_{11} - 62{,}5I_{22} - 13{,}5I_{33} = 0.$$

Система уравнений для контурных токов принимает вид:

$$
\begin{cases}
27I_{11} - 25I_{22} = 5, \\
-25I_{11} + 60I_{22} - 10I_{33} = 0, \\
62{,}5I_{11} - 62{,}5I_{22} - 13{,}5I_{33} = 0.
\end{cases}
$$

Решив эту систему, получим:

$$I_{11} = 0{,}4887 \text{ А}, \quad I_{22} = 0{,}3278 \text{ А}, \quad I_{33} = 0{,}7449 \text{ А}.$$

Токи в ветвях с учетом их направлений, показанных на рис. 2.12:

$$I_{Г} = I_{11} = 0{,}4887 \text{ А},$$

$$I_1 = I_{11} - I_{22} = 0{,}4887 - 0{,}3278 = 0{,}1609 \text{ А},$$

$$I_2 = I_{22} = 0{,}3278 \text{ А},$$

$$I_{Н} = I_{22} - I_{33} = 0{,}3278 - 0{,}7449 = -0{,}4171 \text{ А}.$$

Очевидно, что они совпадают с токами, найденными выше методом узловых потенциалов.

Ответ: $I_{Г} = 0{,}4887$ А, $I_1 = 0{,}1609$ А, $I_2 = 0{,}3278$ А, $I_{Н} = -0{,}4171$ А.

Задача 2.6

Найти ток $I_{Н}$ методом эквивалентного генератора, в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.7.

Решение

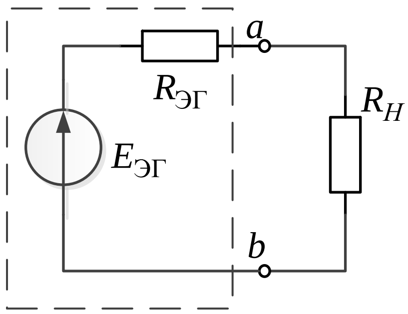


Рис. 2.9

Для определения этим методом тока в нагрузочном сопротивлении вся остальная часть схемы заменяется эквивалентным генератором (рис. 2.9). Определим параметры эквивалентного генератора $E_{ЭГ}$ и $R_{ЭГ}$.

Для этого рассмотрим два режима его работы: холостой ход и короткое замыкание.

Холостой ход эквивалентного генератора (разрыв ветви с сопротивлением $R_{Н}$ (рис. 2.10)). В этом случае напряжение на зажимах источника a и b равно $U_{ХХ} = E_{ЭГ}$. Определить значение

$U_{\text{ХХ}}$ можно при расчете исходной схемы (рис. 2.7), из которой удалена ветвь нагрузки $R_{\text{Н}}$.

Расчет целесообразно провести методом узловых потенциалов. Учитывая что $R_{\text{Н}} = \infty$, получим систему узловых уравнений:

$$\begin{cases} 0,58\varphi_1 - 0,04\varphi_2 = 2,5, \\ 0,1452\varphi_1 + 0,04\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

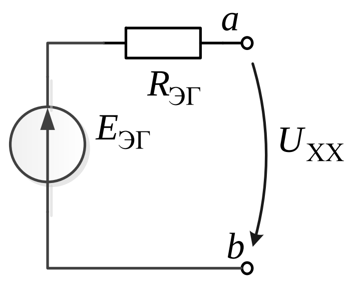


Рис. 2.10

Решение этой системы дает:

$E_{\text{эг}} = U_{\text{хх}} = \varphi_2 = -12,514$ В.

Короткое замыкание эквивалентного генератора (ветвь с сопротивлением $R_{\text{Н}}$ закорочена, т. е. $R_{\text{Н}} = 0$ (рис. 2.11)). Определить значение тока $I_{\text{КЗ}}$ можно путем расчета исходной схемы (рис. 2.8), в которой закорочена ветвь нагрузки. В этом случае удобнее воспользоваться методом контурных токов.

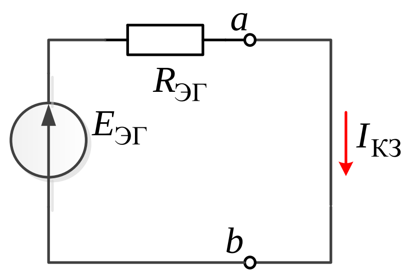


Рис. 2.11

Система контурных уравнений при $R_{\text{Н}} = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} 27I_{11} - 25I_{22} = 5, \\ -25I_{11} + 50I_{22} - 0 \cdot I_{33} = 0, \\ 62,5I_{11} - 62,5I_{22} - 13,5I_{33} = 0. \end{cases}$$

Из ее решения имеем:

$$I_{11} = 0,345 \text{ А}, \qquad I_{22} = 0,172 \text{ А}, \qquad I_{33} = 0,798 \text{ А}.$$

Тогда $$I_{\text{КЗ}} = I_{22} - I_{33} = 0,172 - 0,798 = -0,626 \text{ А},$$

$$R_{\text{ЭГ}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{I_{\text{КЗ}}} = \frac{-12,514}{-0,626} = 19,990 \text{ Ом}.$$

Окончательно для тока нагрузки $I_{\text{Н}}$ (рис. 2.9) получим:

$$I_{\text{Н}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{R_{\text{ЭГ}} + R_{\text{Н}}} = \frac{-12,514}{19,990 + 10} = -0,417 \text{ А}.$$

Ответ: $I_{\text{Н}} = -0,4171$ А.

Задача 2.7

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.12, найти токи методом узловых потенциалов, если $E_1 = 100$ В, $E_2 = 10$ В, $E_5 = 40$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 10$ Ом.

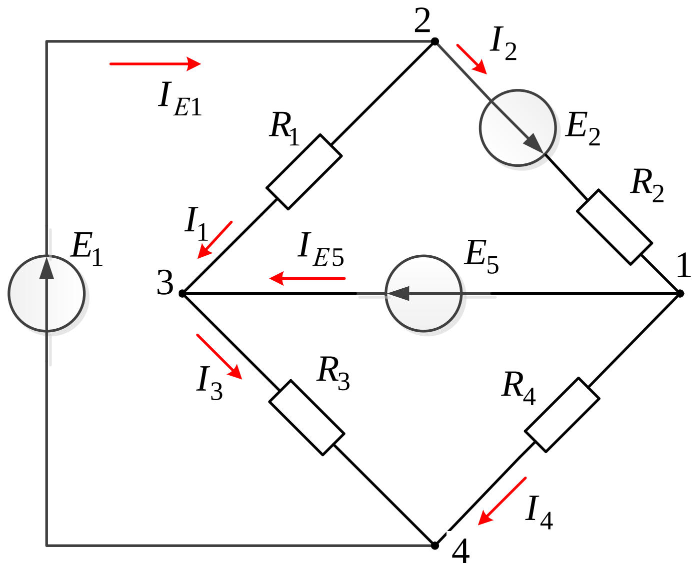


Рис. 2.12

Решение

Примем потенциал четвертого узла равным нулю $\varphi_4 = 0$.

Тогда потенциал второго узла равен: $\varphi_2 = E_1 = 100$ В, и для этого узла уравнение не составляется.

В заданной цепи имеется еще одна, пятая ветвь, содержащая только источник ЭДС. Поэтому в уравнения, составленные по методу узловых потенциалов для узлов 1 и 3, к которым подходит ветвь с ЭДС E_5, войдут слагаемые, имеющие бесконечную проводимость, так как сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю.

Чтобы обойти это затруднение, исключим эту ветвь, для этого введем в ветви, подключенные к узлу 1, дополнительные равновеликие ЭДС E^*, направленные к узлу 1 и равные $E^* = E_5$ (рис. 2.13). Включение дополнительных источников не изменит токов, так как в первый закон Кирхгофа ЭДС не входят, а в уравнениях, составленных по второму

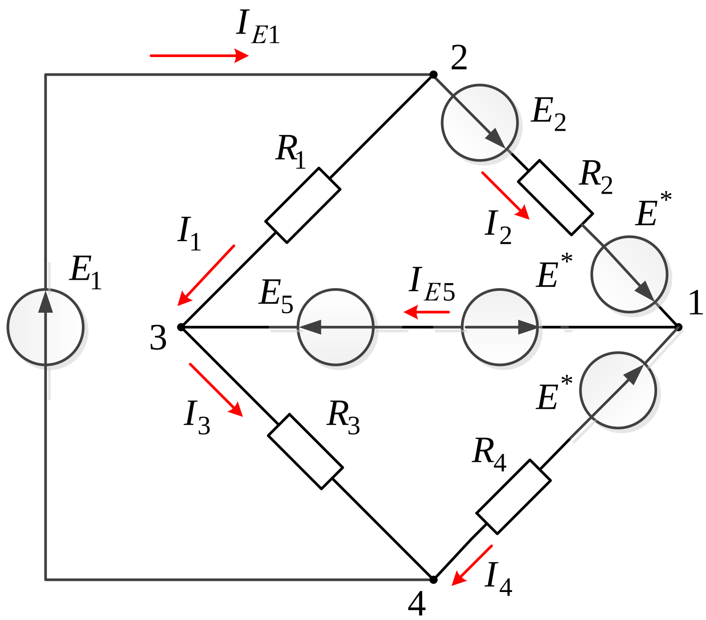


Рис. 2.13

закону Кирхгофа, эти дополнительные ЭДС всегда взаимно компенсируются.

В пятой ветви ЭДС E_5 и E^* компенсируют друг друга; потенциал узла 1 становится равным потенциалу узла 3. Согласно методу узловых потенциалов для цепи, показанной на рис. 2.14, уравнения для узлов 2 и 3 примут вид:

$$\varphi_2 = E_1,$$

$$\varphi_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)-\varphi_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{E_2+E^*}{R_2}+\frac{E^*}{R_4},$$

или после подстановки числовых значений:

$$\varphi_2 = 100 \text{ В},$$

$$\varphi_3\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)-100\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)=\frac{10+40}{30}+\frac{40}{10}.$$

Таким образом, потенциал узла 3

$$\varphi_3 = \varphi_1^* = 60 \text{ В}.$$

Применяя закон Ома, определим токи I_1, I_2, I_3 и I_4:

$$I_1 = \frac{\varphi_2-\varphi_3}{R_1}=\frac{E_1-\varphi_3}{R_1}=\frac{100-60}{20}=2 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2-\varphi_1{}^*+E_2+E^*}{R_2}=$$

$$=\frac{100-60+10+40}{30}=3 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3-\varphi_4}{R_3}=\frac{60-0}{20}=3 \text{ А},$$

$$I_4=\frac{\varphi_1{}^*-\varphi_4-E^*}{R_4}=\frac{60-0-40}{10}=2 \text{ А}.$$

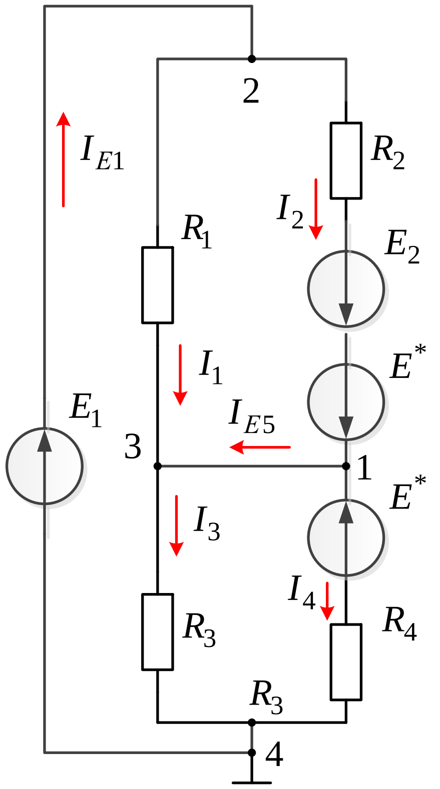


Рис. 2.14

Токи I_{E1} и I_{E5}, согласно первому закону Кирхгофа, равны соответственно:

$$I_{E1} = I_1 + I_2 = 2+3 = 5 \text{ А},$$

$$I_{E5} = I_3 - I_1 = 3-2 = 1 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А, $I_3 = 3$ А, $I_4 = 2$ А, $I_{E_1} = 5$ А, $I_{E_5} = 1$ А.

Задача 2.8

Применив теорему об эквивалентном генераторе и условие передачи максимальной мощности, определите сопротивление резистора R_3 (рис. 2.15), при котором на нем выделяется максимальная мощность. Вычислите значение этой мощности при: E_6 = 40 В, J = 10 мА, R_1 = 5 кОм, R_2 = 3 кОм, R_4 = 2 кОм, R_5 =20 кОм, R_6 = 4 кОм.

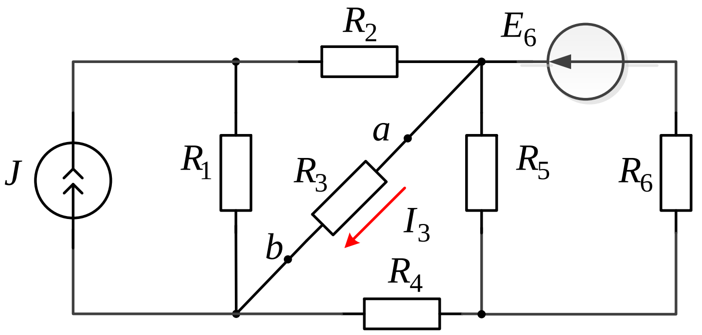


Рис. 2.15

Решение

По отношению к ветви с сопротивлением R_3 найдем параметры эквивалентного генератора (рис. 2.16).

При нахождении ЭДС эквивалентного генератора для схемы в режиме холостого хода (рис. 2.17) удобно применить метод двух узлов, если заменить источник тока эквивалентным источником ЭДС, как показано на рис. 2.18.

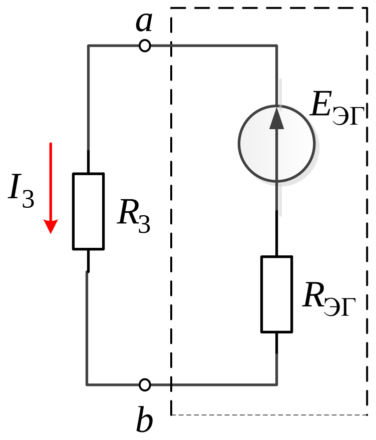


Рис. 2.16

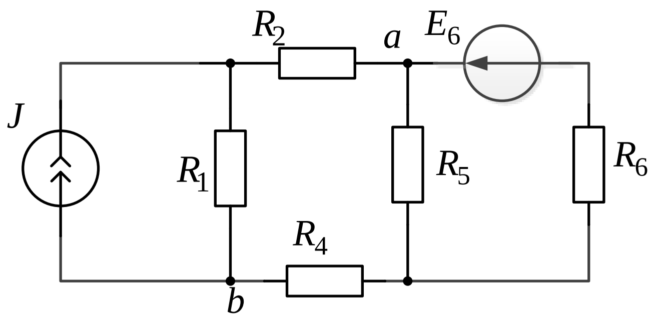


Рис. 2.17

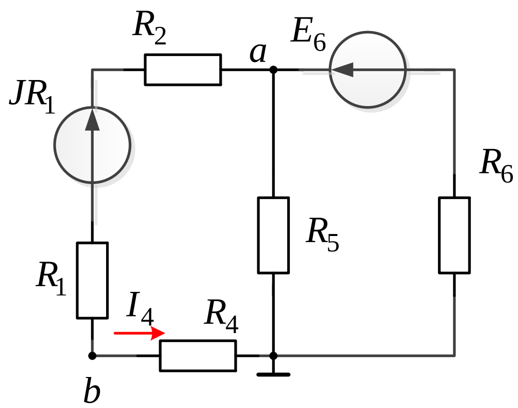


Рис. 2.18

Потенциал узла *a*

$$\varphi_a = \frac{E_6 / R_6 + JR_1 / (R_1 + R_2 + R_4)}{1/R_6 + 1/R_5 + 1/(R_1 + R_2 + R_4)} =$$

$$= \frac{40/4 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 / 10 \cdot 10^3}{1/4 \cdot 10^3 + 1/20 \cdot 10^3 + 1/10 \cdot 10^3} = 37{,}5 \text{ В}.$$

В соответствии с законом Ома ток I_4 равен

$$I_4 = \frac{\varphi_a - JR_1}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{37{,}5 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = -1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{А} = -1{,}25 \text{ мА}.$$

Потенциал узла b

$$\varphi_b = I_4 R_4 = -1{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = -2{,}5 \text{ В}.$$

Напряжение между точками a и b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = 37{,}5 - (-2{,}5) = 40 \text{ В}.$$

$$E_{\text{ЭГ}} = U_{ab} = 40 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора определяем по схеме, представленной на рис. 2.19, в которой ЭДС E_6 закорочена, а ветвь с источником тока разорвана.

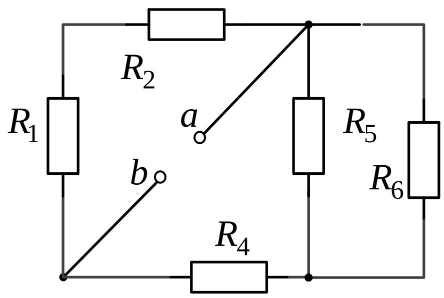


Рис. 2.19

$$R_{\text{ЭГ}} = R_{ab} = \frac{(R_1 + R_2)(R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6})}{R_1 + R_2 + R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}} =$$

$$= \frac{(5+3)(2 + \frac{20 \cdot 4}{20+4})}{5 + 3 + 2 + \frac{20 \cdot 4}{20 + 4}} = 3{,}2 \text{ кОм}.$$

Из условия передачи максимальной мощности определяем величину сопротивления R_3:

$$R_3 = R_{\text{ЭГ}} = 3{,}2 \text{ кОм}.$$

Выделяемая максимальная мощность в резисторе с сопротивлением R_3:

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \left(\frac{E_{\text{ЭГ}}}{R_{\text{ЭГ}} + R_3}\right)^2 R_3 = \frac{E_{\text{ЭГ}}^2}{4R_3} = \frac{1600}{4 \cdot 3{,}2 \cdot 10^3} = 125 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Ответ: $R_3 = 3{,}2$ кОм, $P_3 = 125 \cdot 10^{-3}$ Вт.

Задача 2.9

Найти ток I_1 в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.20, если $E_1 = 4$ В, $E_2 = E_3 = 2$ В, $E_4 = 12$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = R_5 = 4$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_6 = 1$ Ом.

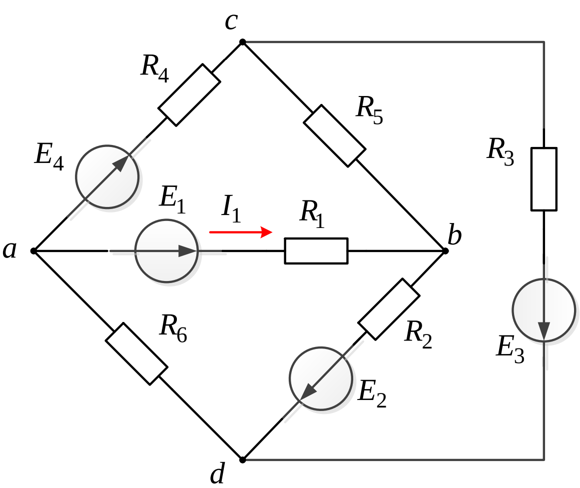


Рис. 2.20

Решение

По отношению к ветви с сопротивлением R_1 и ЭДС E_1 заменим цепь эквивалентным генератором (рис. 2.21):

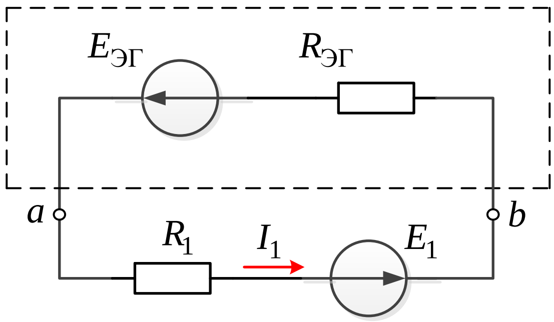


Рис. 2.21

В режиме холостого хода определим напряжение U_{ab} (рис. 2.22), для чего воспользуемся методом двух узлов, приняв $\varphi_d = 0$:

$$U_{cd} = \varphi_c = \frac{\dfrac{E_4}{R_4 + R_6} - \dfrac{E_2}{R_2 + R_5} - \dfrac{E_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_4 + R_6} + \dfrac{1}{R_2 + R_5} + \dfrac{1}{R_3}} =$$

$$= \frac{\dfrac{12}{3} - \dfrac{2}{8} - \dfrac{2}{8}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}} = 6 \text{ В}.$$

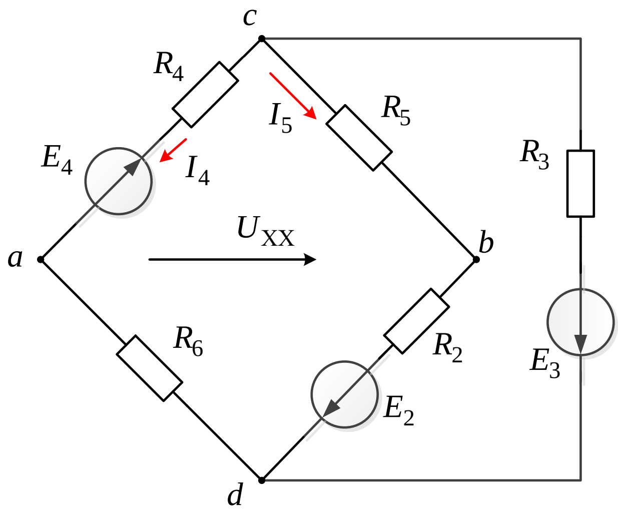


Рис. 2.22

По закону Ома токи в ветвях:

$$I_4 = \frac{\varphi_c - E_4}{R_4 + R_6} = \frac{6 - 12}{3} = -2 \text{ А},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_c + E_2}{R_2 + R_5} = \frac{6 + 2}{8} = 1 \text{ А}.$$

Определим потенциалы точек a и b:

$$\varphi_a = \varphi_d + I_4 \cdot R_6 = (-2) \cdot 1 = -2 \text{ В},$$
$$\varphi_b = -E_2 + I_5 R_2 = -2 + 1 \cdot 4 = 2 \text{ В}.$$

Напряжение холостого хода U_{ab}

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = -2 - 2 = -4 \text{ В}, \; E_{ЭГ} = U_{ab} = -4 \text{ В}.$$

Сопротивление эквивалентного генератора определяем по схеме, приведенной на рис. 2.23, в которой закорочены источники ЭДС. При этом преобразуем, например, соединение «треугольник» с сопротивлениями R_2, R_3, R_5 в эквивалентную «звезду» с сопротивлениями R_b, R_c, R_d :

$$R_b = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4 + 8} = 1 \text{ Ом},$$

$$R_c = \frac{R_3 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{8 \cdot 4}{4 + 4 + 8} = 2 \text{ Ом},$$

$$R_d = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{4 \cdot 8}{4 + 4 + 8} = 2 \text{ Ом}.$$

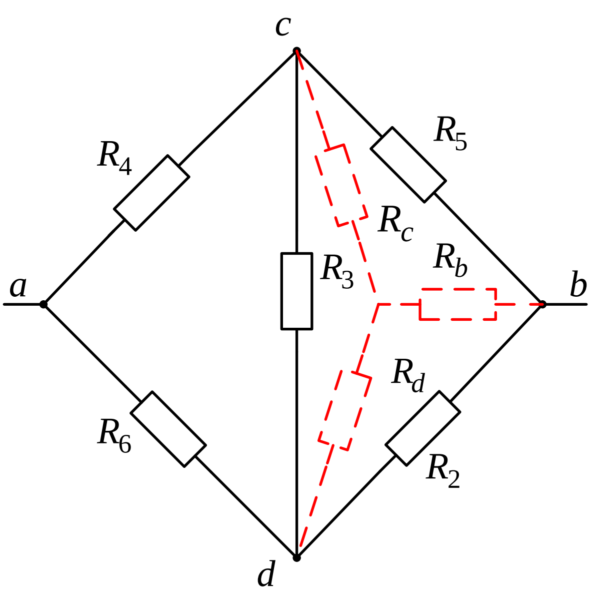


Рис. 2.23

В полученной эквивалентной схеме присутствуют только последовательные и параллельные сопротивления. Тогда

$$R_{ab} = R_b + \frac{(R_4 + R_c)(R_6 + R_d)}{R_c + R_6 + R_d + R_4} = 1 + \frac{(2+2)\cdot(1+2)}{2+1+2+2} = 2{,}7 \text{ Ом}.$$

Искомый ток

$$I_1 = \frac{E_{ЭГ} + E_1}{R_{ЭГ} + R_1} = \frac{-4 + 4}{2{,}7 + 5} = 0 \text{ А}.$$

Ответ: $I_1 = 0$.

Задача 2.10

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.24, вычислить напряжение U_5, применив метод наложения, если R_1= 40 Ом, R_2= 10 Ом, R_3= 50 Ом, R_4 = 20 Ом, R_5 = 20 Ом, E_1 = 50 В, J_2 = 2.5 А.

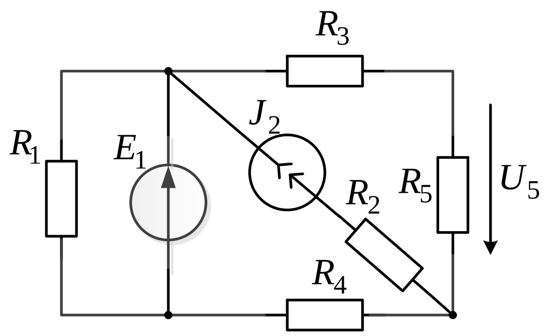


Рис. 2.24

Решение

Напряжение U_5 определяется суммой частичных напряжений, создаваемых источником ЭДС и источником тока:

$$U_5 = U_5^{E_1} + U_5^{J_2}.$$

Расчет напряжения $U_5^{E_1}$ проводим по схеме (рис. 2.25), в которой ветвь с источником тока разрывается:

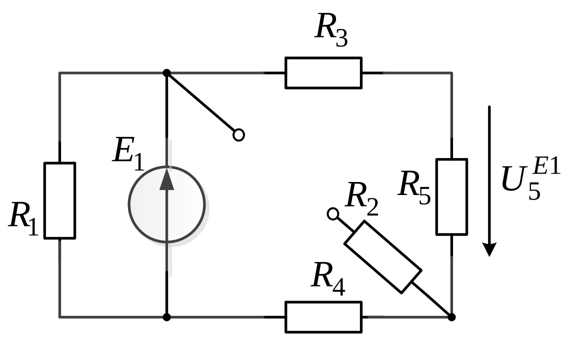


Рис. 2.25

$$U_5^{E_1} = \left[\frac{E_1}{R_3 + R_4 + R_5}\right] R_5 =$$

$$= \frac{50}{50+20+20} \cdot 20 = 11{,}11 \text{ В}.$$

Расчет напряжения $U_5^{J_2}$ проводим по схеме (рис. 2.26), в которой источник ЭДС закорочен вследствие того, что его внутреннее сопротивление равно нулю.

$$U_5^{J_2} = \left[J_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_5}\right] R_5 =$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot 20 \cdot 20}{50+20+20} = 11{,}11 \text{ В}.$$

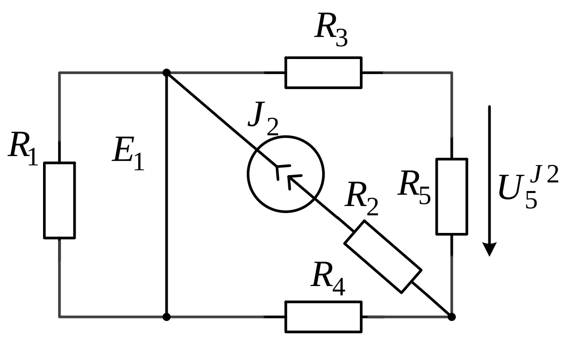


Рис. 2.26

Искомое напряжение:

$$U_5 = U_5^{E_1} + U_5^{J_2} = 11{,}11 + 11{,}11 = 22{,}22 \text{ В}$$

.

Ответ: $U_5 = 22{,}22$ В.

Задача 2.11

Найти ток I_5 в электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.27, если $E = 120$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 90$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $R_5 = 12$ Ом.

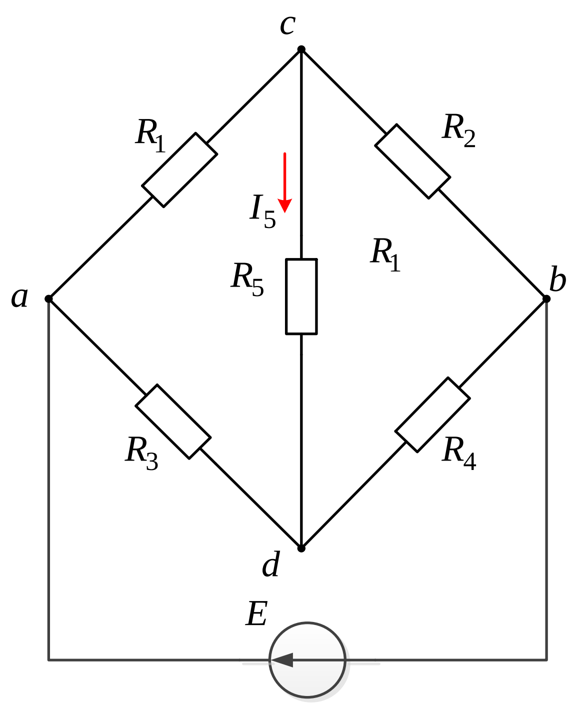


Рис. 2.27

Решение

Воспользуемся теоремой взаимности. Ток I_5, вызванный ЭДС E, равен току I_6^*, если ЭДС E поместить в пятую ветвь (рис. 2.27). Сначала вычислим ток I_5^* в ветви с источником ЭДС (рис. 2.28, 2.29).

$$I_5^* = \frac{E}{R_5 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} =$$

$$= \frac{120}{12 + \dfrac{60 \cdot 15}{60 + 15} + \dfrac{60 \cdot 90}{60 + 90}} = 2 \text{ А.}$$

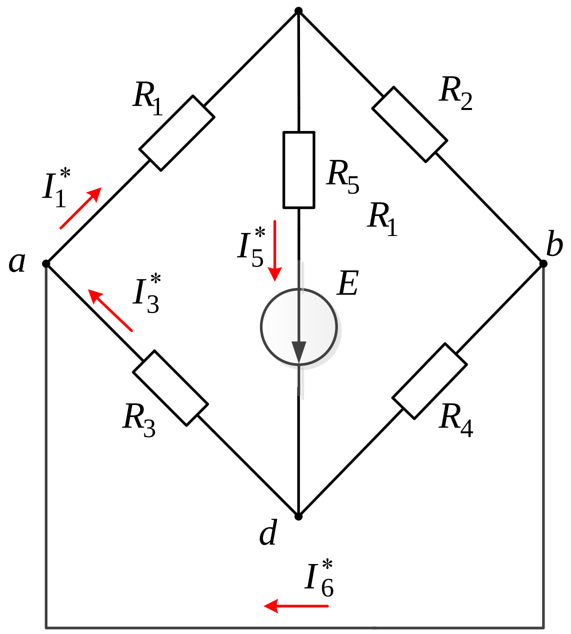


Рис. 2.28

По формуле разброса находим токи I_1^* и I_3^*:

$$I_1^* = I_5^* \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2 \frac{15}{60 + 15} = 0{,}4 \text{ А},$$

$$I_3^* = I_5^* \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2 \frac{60}{90 + 60} = 0{,}8 \text{ А.}$$

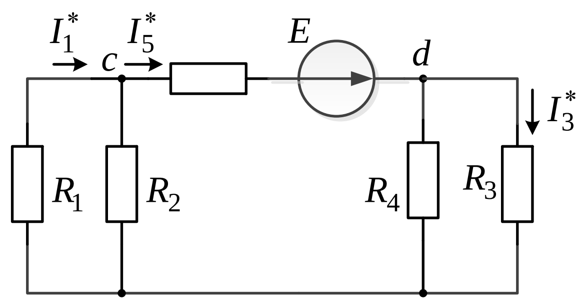


Рис. 2.29

Согласно первому закону Кирхгофа, составленному для узла a (рис. 2.28), ток I_6^* равен:

$$I_6^* = I_1^* - I_3^* = 0{,}4 - 0{,}8 = -0{,}4 \text{ А.}$$

По теореме взаимности искомый ток: $I_5 = I_6^* = -0{,}4$ А.

Ответ: $I_5 = -0{,}4$ А.

Задача 2.12

Каковы должны быть сопротивления R_1, R_2, R_3 П-образной схемы (рис. 2.30), чтобы при сопротивлении нагрузки $R_Н = 40$ Ом отношение U_2/I_2 равнялось $2U_1/I_1$, а при $R_Н = \infty$ (холостой ход) $U_2 = 2U_1/3$, и чтобы при перемене местами источника и нагрузки указанные соотношения сохранились?

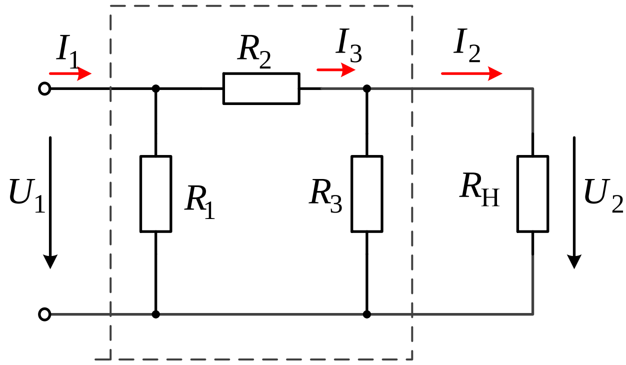


Рис. 2.30

Решение

При перемене местами источника электрической энергии и нагрузки режим не изменится при $R_1 = R_3$. При сопротивлении нагрузки $R_H = \dfrac{U_2}{I_2} = 40$ Ом должно выполняться соотношение:

$$\frac{U_2}{I_2} = 2\frac{U_1}{I_1},$$

причем

$$\frac{U_1}{I_1} = R_{ВХ} = \frac{R_1\left(R_2 + \dfrac{R_3R_H}{R_3 + R_H}\right)}{R_1 + \left(R_2 + \dfrac{R_3R_H}{R_3 + R_H}\right)}.$$

Таким образом, второе уравнение, связывающее неизвестные сопротивления, запишется в виде

$$R_H = 2\frac{R_1\left(R_2 + \dfrac{R_3R_H}{R_3 + R_H}\right)}{R_1 + \left(R_2 + \dfrac{R_3R_H}{R_3 + R_H}\right)}.$$

В режиме холостого хода, когда справедливо условие $I_2 = 0$,

$$U_1 = I_{3_0}(R_2 + R_3) \quad \text{и} \quad U_2 = I_{3_0}R_3.$$

Итак, третье условие при $R_Н = \infty$:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad \frac{R_2 + R_3}{R_3} = \frac{3}{2}$$

Из этих трех условий получим:

$$R_1 = R_3 = 40 \ \text{Ом}, \quad R_3 = 20 \ \text{Ом}.$$

Ответ: 40 Ом, 20 Ом, 40 Ом.

Задача 2.13

Определить ток I методом контурных токов (рис. 2.31), если E = 80 В, R=40 Ом, J=3 А.

Ответ: 2 А.

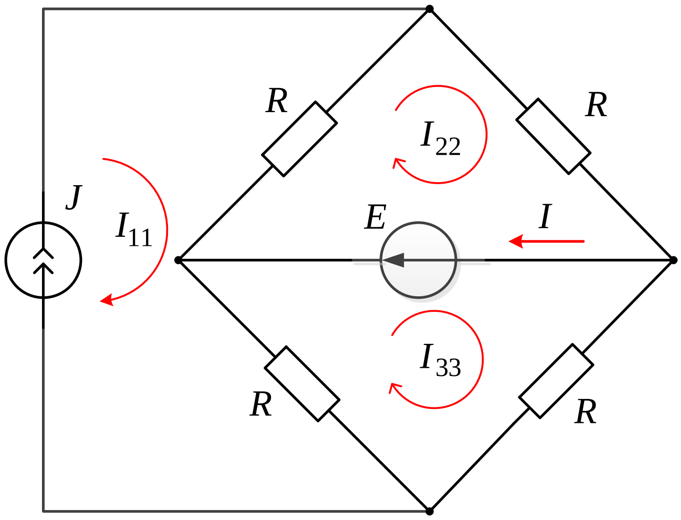


Рис.2.31

Задача 2.14

Определить показание вольтметра (рис. 2.32), если $E_1 = 80$ В, $R_1 = R_3 = 4$ кОм, $E_2 = 30$ В, $R_2 = 2$ кОм, $E_3 = 20$ В.

Ответ: 40 В.

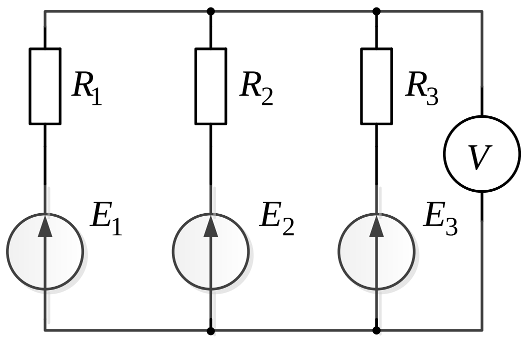


Рис. 2.32

Задача 2.15

Найти токи в цепи, схема которой приведена на рис. 2. 33, если $E_1 = 2$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

Ответ: 2 А, 1 А, 3 А.

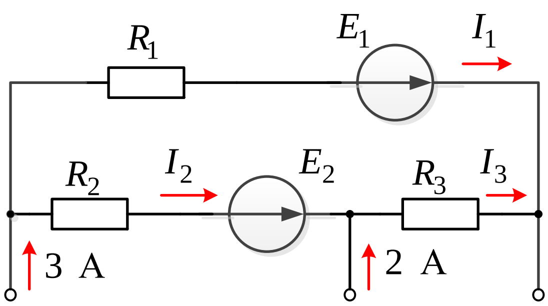


Рис. 2.33

Задача 2.16

Методом эквивалентного генератора тока определить ток в ветви с сопротивлением R_1 (рис.2.34), если

$R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 8$ Ом, $E_2 = 22$ В, $E_4 = 13$ В, $J = 3$ А.

Ответ: 3,25 А .

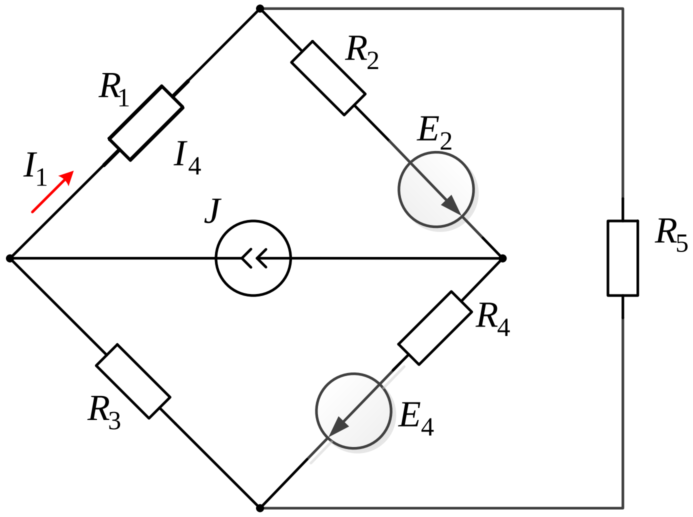


Рис. 2.34

Задача 2.17

а) Определить показание вольтметра в цепи, схема которой изображена на рис. 2.35 если $E_1 = 20$ В, $E_2 = 10$ В, $E_3 = 10$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 5$ Ом.

б) Определить показание амперметра, который включен вместо вольтметра.

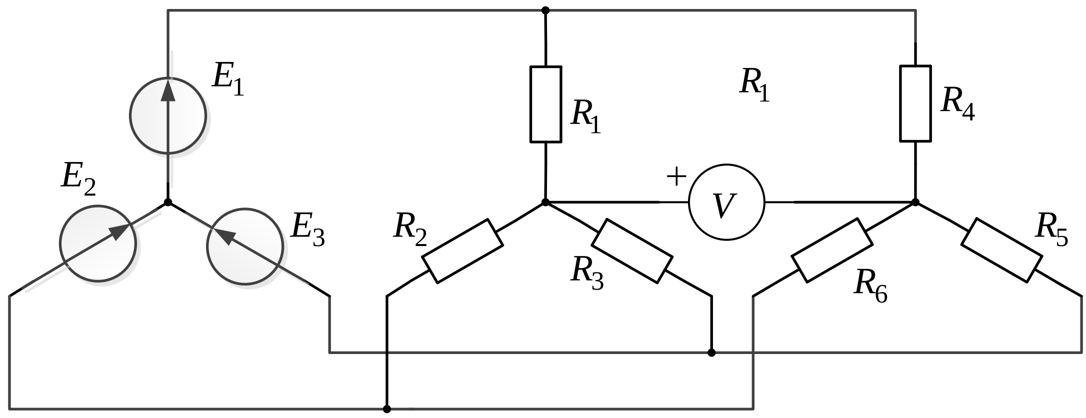


Рис. 2.35

Ответ: а) 10,91 В; б) 2 А.

Задача 2.18

Определить ток I_3 (рис. 2.36), если $E_1 = 80$ В, $E_5 = 200$ В, $R_1 = R_5 = 400$ Ом, $R_2 = R_4 = 200$ Ом, $R_3 = 40$ Ом.

Ответ: 0,13 А

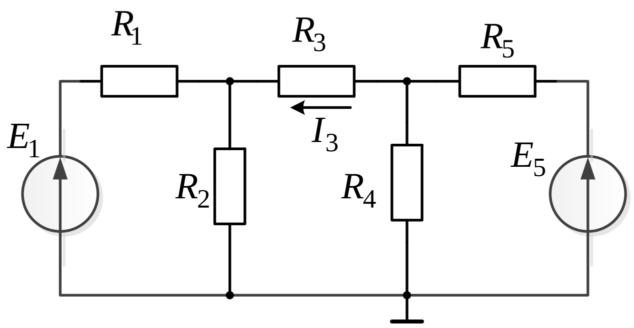


Рис. 2.36

Задача 2.19

В электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.37, амперметр в первом положении переключателя показал 40 мА, во втором – 60 мА. ЭДС цепи равны: $E_2 = 4$ В, $E_3 = 6$ В.

Определить показание амперметра в случае, когда переключатель установлен в положение 3.

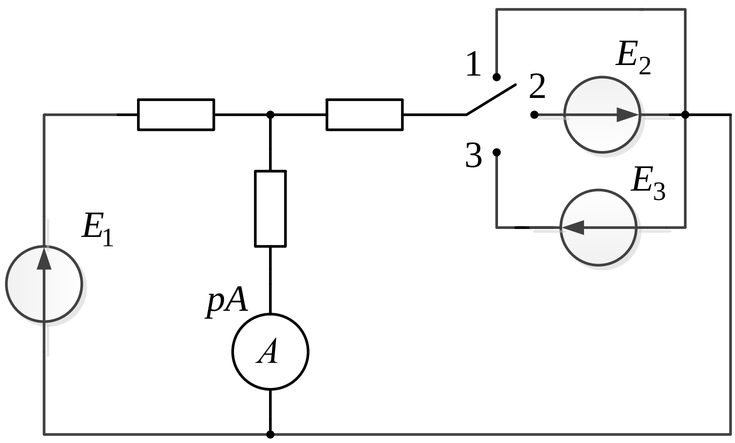


Рис. 2.37

Ответ: 190 мА.

Задача 2.20

В электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.38, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = R_3$, P_1=36 Вт, $P_2 = 50$ Вт; P_3=2 Вт. Найти: R_2, E_1, E_2.

Ответ: $R_2 = 2$ Ом,
$E_1 = 8$ В, $E_2 = 8$ В.

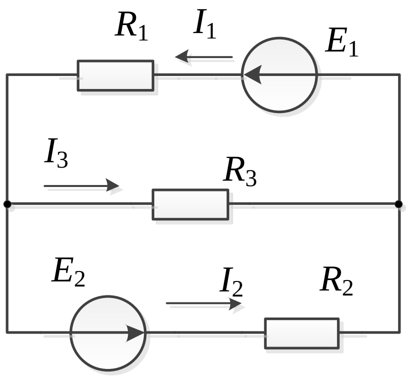


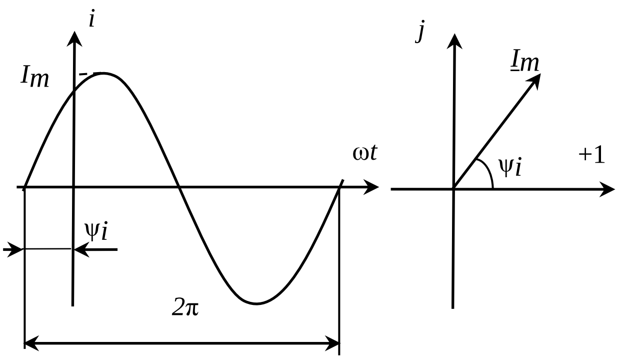
Рис. 2.38

3. ПАССИВНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИК ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ТОКЕ

3.1. Краткие теоретические сведения

Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i); \quad \omega = 2\pi f; \quad T = 1/f$$



Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m$$

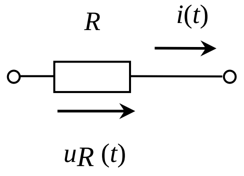
Среднее значение тока за половину периода

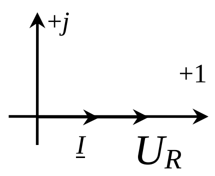
$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i dt = \frac{2 I_m}{\pi} = 0{,}637\, I_m$$

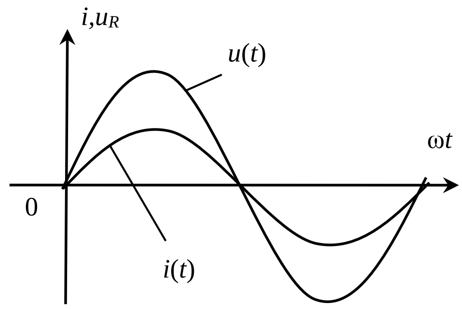
$i(t) = \mathrm{Im}[\underline{I}_m e^{j\omega t}]$, где $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i} = I\cos\psi_i + jI\sin\psi_i = I_{\text{а}} + jI_{\text{р}}$$

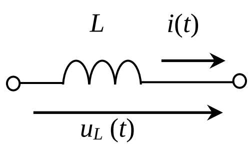
Сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока

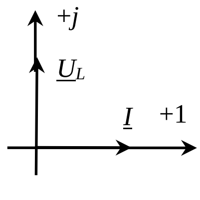


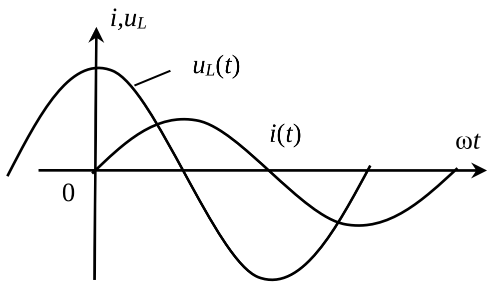




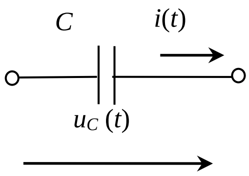
$u_R(t) = R\, i(t)$ $\quad \underline{U}_R = R\,\underline{I}$ $\quad \underline{Z}_R = R$ $\quad \underline{Y}_R = G = 1/R$

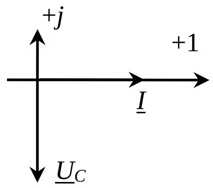


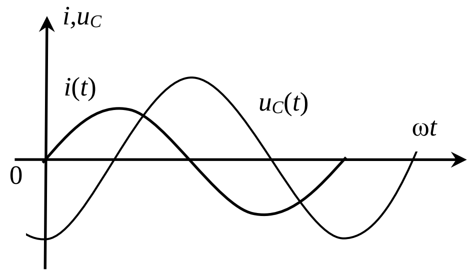




$$u_L = L\frac{di}{dt} \quad \underline{U}_L = j\omega L \underline{I} \quad \underline{Z}_L = jX_L = j\omega L \quad \underline{Y}_L = -jB_L = -j/(\omega L)$$

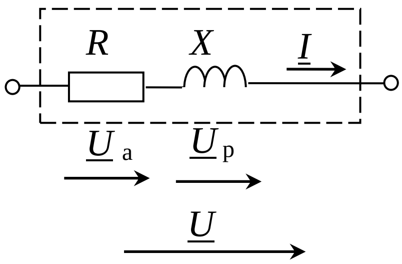


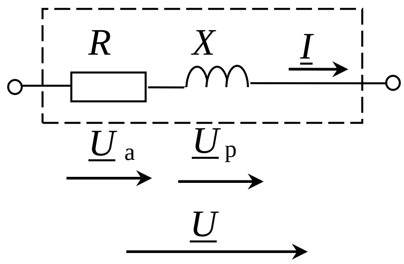




$$i = C\frac{du_C}{dt} \qquad \underline{U}_{\text{C}} = -j/(\omega C)\,\underline{I} \qquad \underline{Z}_{\text{C}} = -jX_{\text{C}} = -j/(\omega C) \qquad \underline{Y}_C = jB_C = j\omega C$$

Схемы замещения и параметры пассивного двухполюсника





$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

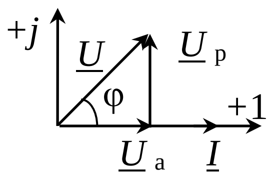
где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,

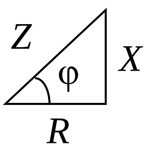
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg}\,\frac{X}{R}$$

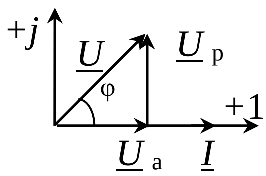
$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

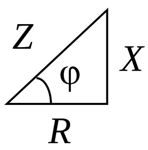
где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg}\,\frac{X}{R}$$









$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{а}} + \underline{U}_{\text{р}},$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB, \text{ где}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{а}} + \underline{U}_{\text{р}},$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = R + jX, \text{ где}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

Активная мощность

$P = U\,I\cos\varphi$ [Вт]

Реактивная мощность

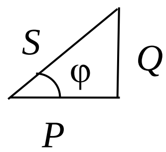
$Q = U\,I\sin\varphi$ [ВАр]

Полная мощность

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$ [ВА]

Коэффициент мощности

$\cos\varphi = P/S$



3.2. Примеры и задачи

Задача 3.1

Для определения параметров последовательной схемы замещения индуктивной катушки (активного сопротивления R и индуктивности L) в цепь переменного тока с частотой 50 Гц включили вольтметр, амперметр и ваттметр, как показано на рис. 4.1.

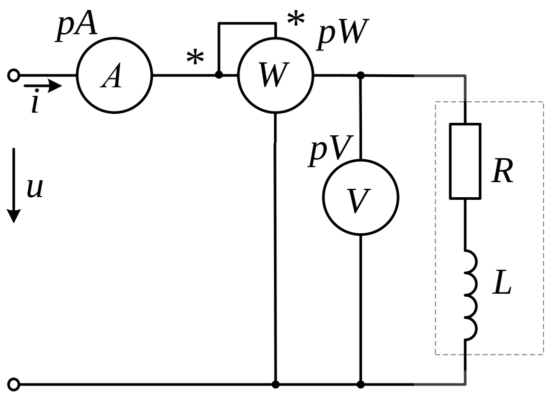


Рис. 3.1

Найти R и L, если показания приборов равны:
pV = 65 В, pA = 5 А, pW = 128 Вт.

Решение

По показаниям амперметра и вольтметра определим модуль полного сопротивления цепи Z

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{65}{5} = 13 \text{ Ом}.$$

Коэффициент мощности:

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{128}{65 \cdot 5} = 0{,}39384.$$

Активное сопротивление R:

$$R = Z\cos\varphi = 13 \cdot 0{,}39384 = 5{,}12 \text{ Ом}.$$

Индуктивное (реактивное) сопротивление:

$$X_L = \omega L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5{,}12^2} = 11{,}95 \text{ Ом}.$$

Индуктивность катушки:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{11{,}95}{2\pi \cdot 50} = 0{,}038 \text{ Гн}. \qquad \varphi$$

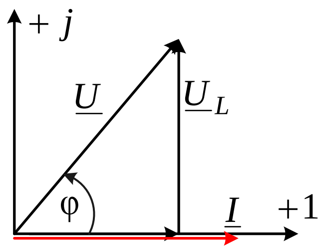


Рис. 3.2

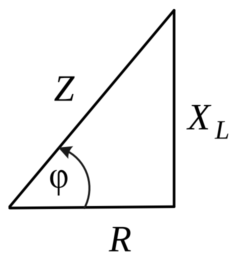


Рис. 3.3

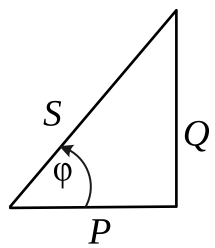


Рис. 3.4

На рис. 3.2, 3.3 и 3.4 приведены векторная диаграмма напряжений, треугольник сопротивлений и треугольник мощностей.

Ответ: R = 5,12 Ом, L = 0,038 Гн.

Задача 3.2

Для определения параметров эквивалентной схемы замещения пассивного двухполюсника (рис. 3.5) при частоте 50 Гц измерены: приложенное напряжение U_1 = 26 В, ток I_1 = 4 А и потребляемая мощность P_1 = 40 Вт.

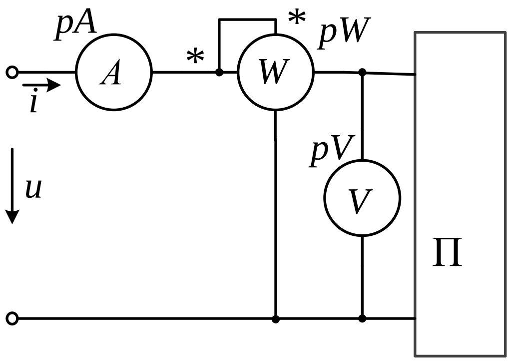


Рис. 3.5

При включении последовательно с двухполюсником конденсатора приборы показали: U_2 = 26 В, I_2 = 5,53 А, P_2 = 76,5 Вт.

Рассчитать параметры последовательной и параллельной схемы замещения пассивного двухполюсника.

Решение

По показаниям приборов в первом опыте определим параметры последовательной эквивалентной схемы замещения двухполюсника (рис. 3.6):

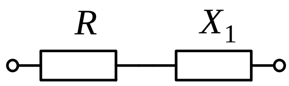


Рис. 3.6

$$R = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{40}{4^2} = 2{,}5 \text{ Ом}, \quad Z = \frac{U_1}{I_1} = \frac{26}{4} = 6{,}5 \text{ Ом},$$

$$X_1 = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{6{,}5^2 - 2{,}5^2} = \pm 6 \text{ Ом}.$$

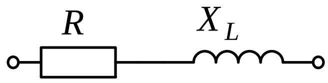


Рис. 3.7

Результаты эксперимента не дают однозначного ответа на вопрос, какой характер двухполюсника: индуктивный (рис. 3.7) или емкостной (рис. 3.8).

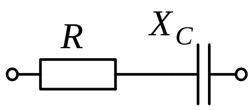


Рис. 3.8

Для определения характера двухполюсника с ним последовательно включают конденсатор и проводят те же измерения.

Из данных второго опыта найдем полное и реактивное сопротивления, отметив, что при этом активное сопротивление не меняется:

$$R=\frac{P_2}{I_2{}^2}=\frac{76{,}5}{5{,}53^2}=2{,}5\,\text{Ом},\quad Z=\frac{U_2}{I^2}=\frac{26}{5{,}53}=4{,}7\ \text{Ом},$$

$$X_2=\sqrt{Z^2-R^2}=\sqrt{4{,}7^2-2{,}5^2}=\pm 4\ \text{Ом}.$$

При неизменном приложенном напряжении и постоянном активном сопротивлении ток I_2 оказался больше тока I_1. Введенное дополнительное емкостное сопротивление уменьшает общее реактивное сопротивление цепи. Это значит, что реактивное сопротивление X_1 имеет индуктивный характер:

$$X_2=X_1-X_C=+6-X_C=\pm 4\ \text{Ом и, следовательно,}\quad X_1=+6\ \text{Ом}.$$

При этом индуктивность

$$L=\frac{X_1}{\omega}=\frac{6}{314}=19{,}1\cdot 10^{-3}\,\text{Гн}.$$

Неизвестное значение дополнительно введенного емкостного сопротивления X_C может иметь следующие значения:

$$X_C=2\ \text{Ом}\qquad \text{или}\qquad X_C=10\ \text{Ом}.$$

Параметры параллельной эквивалентной схемы замещения двухполюсника (рис. 3.9):

$$G=\frac{R_1}{R_1^2+X_1^2}=\frac{2{,}5}{2{,}5^2+6^2}=0{,}059\ \text{См},$$

$$B_L=\frac{X_1}{R_1^2+X_1^2}=\frac{6}{2{,}5^2+6^2}=0{,}142\ \text{См}.$$

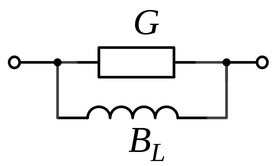


Рис. 3.9

Параметры параллельной схемы замещения можно так же выразить через сопротивление и индуктивность:

$$R_\Pi=\frac{1}{G}=\frac{1}{0{,}059}=16{,}9\,\text{Ом},\ \ \text{Ом},\ L_\Pi=\frac{X_\Pi}{\omega}=\frac{7{,}04}{314}=22{,}4\cdot 10^{-3}\text{Гн}.$$

Ответ: последовательная схема замещения: R = 2,5 Ом, L = 19,1 мГн; параллельная схема замещения: R_Π = 16,9 Ом, L_Π = 22,4·10^{-3} Гн.

Задача 3.3

Для активно-индуктивного двухполюсника, питаемого от источника синусоидального напряжения $U=10$ В с частотой $f=1000$ кГц, известны его полное сопротивление $Z=15$ Ом и потребляемая активная мощность $P=1$ Вт. Определить мгновенное значение тока. Как изменится действующее значение входного тока, если последовательно с двухполюсником включить а) резистор $R_0 = 10$ Ом; б) катушку $L_0 = 1$ мГн; в) конденсатор $C_0 = 20$ мкФ.

Решение

Мгновенное значение входного тока описывается выражением $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Амплитуда I_m определяется по закону Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U\sqrt{2}}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{15} = 0{,}943 \text{ А}.$$

Угловая частота $\omega = 2\pi f = 6{,}28 \cdot 10^3$ 1/с. Начальную фазу тока ψ_i найдем из соотношения $\varphi = \psi_u - \psi_i$, где ψ_u – начальная фаза напряжения. Приняв $\psi_u = 0$, получим $\psi_i = -\varphi$. Выражение $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ позволяет определить угол сдвига фаз φ:

$$\text{при } R = \frac{P}{I^2} = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{2 \cdot 1}{(0{,}943)^2} = 2{,}25 \text{ Ом},$$

$$\varphi = \arccos\frac{R}{Z} = \arccos\frac{2{,}25}{15} = 81{,}37^0 \text{ и } \psi_i = -81{,}3^\circ.$$

Окончательно выражение для мгновенного значения тока примет вид:

$$i(t) = 0{,}943 \sin(6{,}28 \cdot 10^3 t - 81{,}37^\circ) \text{ А}.$$

Для определения действующего значения входного тока I при включении последовательно с двухполюсником дополнительного элемента следует рассчитать новое значение полного сопротивления Z. Поскольку $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, то первоначальное значение реактивного сопротивления

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{15^2 - 2{,}25^2} = 14{,}83 \text{ Ом}.$$

Учитывая, что сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi > 0$, следует принять в выражении для X знак «+» т. е. двухполюсник носит индуктивный характер.

а) Если последовательно с двухполюсником включается резистор R_0, активное сопротивление возрастает на величину $R_0 = 10$ Ом, и полное сопротивление цепи становится равным

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}=\sqrt{(2{,}25+10)^2+14{,}837^2}=19{,}24 \text{ Ом},$$

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{10}{19{,}24}=0{,}52 \text{ А}.$$

б) Если последовательно с двухполюсником включается катушка, то X возрастает на величину $X_{L0}=\omega L_0=6{,}28\cdot 10^3\cdot 1\cdot 10^{-3}=6{,}28$ Ом.

Тогда $Z=\sqrt{R^2+X^2}=\sqrt{(2{,}25)^2+(14{,}837+6{,}28)^2}=21{,}3$ Ом,

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{10}{21{,}3}=0{,}47 \text{ А}.$$

в) Если последовательно с двухполюсником включается конденсатор, то X уменьшается на величину его сопротивления

$$X_{C0}=\frac{1}{\omega C_0}=\frac{1}{6{,}28\cdot 10^3\cdot 20\cdot 10^{-6}}=7{,}96 \text{ Ом}.$$

В этом случае

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}=\sqrt{(2{,}25)^2+(14{,}837-7{,}96)^2}=7{,}23 \text{ Ом},$$

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{10}{7{,}23}=1{,}38 \text{ А}.$$

Ответ: $i(t)=0{,}943\sin(6{,}28\cdot 10^3 t-81{,}37^\circ)$ А; а) $I=0{,}52$ А; б) $I=0{,}47$ А; в) $I=1{,}38$ А.

Задача 3.4

Представить в показательной форме, используя приложение, следующие комплексные числа:

1) $3{,}2-j1{,}25$; 2) $-3{,}2+j1{,}25$; 3) $-1{,}25-j3{,}2$; 4) $j3$.

Записать в алгебраической форме, используя приложение, следующие комплексные числа:

5) $8\,e^{j180^\circ}$; 6) $32\,e^{-j19^\circ}$; 7) $-28\,e^{-j98^\circ}$; 8) $4\,e^{j270^\circ}$.

Ответ: 1) $3{,}44\,e^{-j21{,}3^\circ}$; 2) $3{,}44\,e^{j158{,}7^\circ}$; 3) $3{,}44\,e^{-j111{,}3^\circ}$; 4) $3\,e^{j90^\circ}$; 5) -8; 6) $30{,}3-j10$; 7) $3{,}9+j27{,}4$; 8) $-j4$.

Задача 3.5

Построить векторную диаграмму для цепи, изображенной на рис. 3.10, и определить действующие значения входного тока и напряжения, если: $U_1 = U_3 = 20$ В, $U_5 = 10$ В, $I_2 = 1$ А, $I_4 = I_5 = 2$ А.

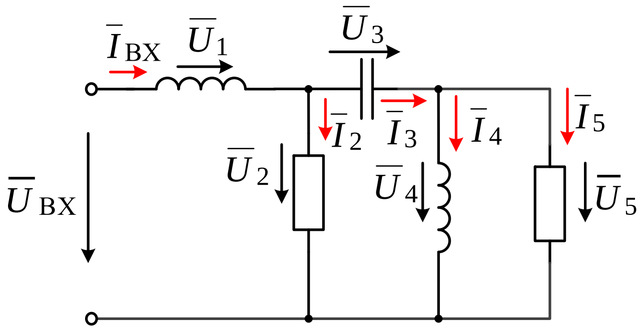


Рис. 3.10

Решение

Построение векторной диаграммы следует начать с изображения вектора напряжения или тока, относительно которого можно однозначно сориентировать наибольшее количество векторов, соответствующих другим токам или напряжениям в данной цепи.

В рассматриваемой цепи такой величиной является напряжение U_5, относительно которого известны фазовые сдвиги токов I_5 и I_4.

Отложим вектор напряжения $\overline{U}_5$ на диаграмме вертикально вверх (рис. 3.11).

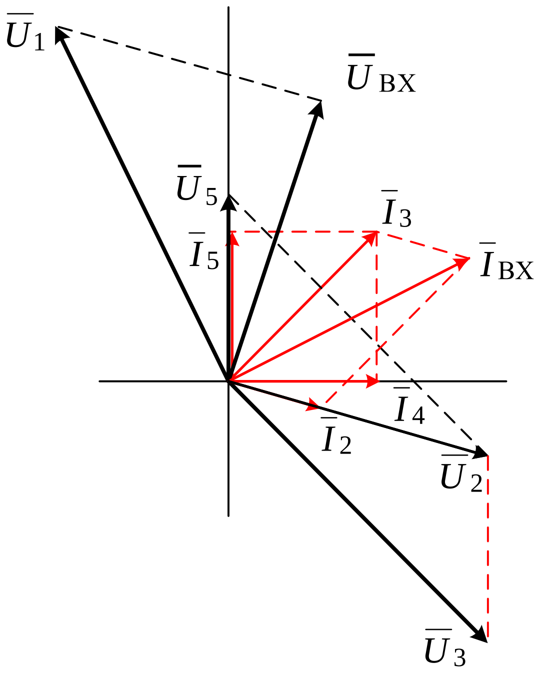


Рис. 3.11

Вектор тока в резистивной ветви $\overline{I}_5$ совпадает по направлению с вектором $\overline{U}_5$, а ток $\overline{I}_4$ в индуктивности отстает от $\overline{U}_5$ на угол $\pi/2$. Далее, используя первый закон Кирхгофа в векторной форме, строим вектор тока $\overline{I}_3$ как сумму векторов токов $\overline{I}_4$ и $\overline{I}_5$. Как следует из диаграммы $I_3 = 2\sqrt{2}$ А и расположен под углом 45° к горизонтальной оси.

При этом горизонтальная составляющая вектора $\overline{I}_3$ $I_{3_a} = I_4 = 2$ А, а его вертикальная составляющая – $I_{3_p} = I_5 = 2$ А. В дальнейшем такими же индексами будем обозначать горизонтальные и вертикальные составляющие и других векторов.

Вектор напряжения на конденсаторе $\overline{U}_3$ отстает от тока $\overline{I}_3$ на угол $\pi/2$, тогда

$$U_{3a} = U_3 \cos(-45^\circ) = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ В},$$

$$U_{3p} = U_3 \sin(-45^\circ) = 20 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -10\sqrt{2} \text{ В}.$$

Используя второй закон Кирхгофа, строим вектор напряжения с Его горизонтальная и вертикальная составляющие равны:

$$U_{2a} = U_{3a} + U_{5a} = 10\sqrt{2} + 0 = 14{,}14 \text{ В},$$

$$U_{2p} = U_{3p} + U_{5p} = -10\sqrt{2} + 10 = -4{,}14 \text{ В}.$$

Тогда действующее значение напряжения $\overline{U}_2$

$$U_2 = \sqrt{U_{2a}^2 + U_{2p}^2} = \sqrt{14{,}14^2 + 4{,}14^2} = 14{,}73 \text{ В},$$

и вектор $\overline{U}_2$ составляет с горизонтальной осью угол

$$\theta_{U2} = \operatorname{arctg}\frac{U_{2p}}{U_{2a}} = \operatorname{arctg}\frac{-4{,}14}{14{,}14} = -16{,}3^\circ.$$

Ток $\overline{I}_2$ в резистивной ветви совпадает по фазе с $\overline{U}_2$. Далее строим вектор $\overline{I}_{\text{ВХ}} = \overline{I}_2 + \overline{I}_3$. Численное значение входного тока определим следующим образом:

$$I_{\text{ВХ}\,a} = I_{3a} + I_{2a} = 2 + 1 \cdot \cos(-16{,}3^\circ) = 2{,}96 \text{ А},$$

$$I_{\text{ВХ}\,p} = I_{3p} + I_{2p} = 2 + 1 \cdot \sin(-16{,}3^\circ) = 1{,}72 \text{ А},$$

$$I_{\text{ВХ}} = \sqrt{I_{\text{ВХ}\,a}^2 + I_{\text{ВХ}\,p}^2} = \sqrt{2{,}96^2 + 1{,}72^2} = 3{,}42 \text{ А},$$

$$\theta_{I\,\text{ВХ}} = \operatorname{arctg}\frac{I_{\text{В}Xp}}{I_{\text{В}Xa}} = \operatorname{arctg}\frac{1{,}72}{2{,}96} = 30{,}2^\circ.$$

Вектор напряжения на катушке $\vec{U}_1$ опережает вектор тока $\vec{I}_{\text{ВХ}}$ на угол $\pi/2$, т.е. он составляет с горизонтальной осью угол

$$\theta_{U1} = \theta_{I\,\text{ВХ}} + 90^\circ = 30{,}2^\circ + 90^\circ = 120{,}2^\circ.$$

Наконец, строим вектор $\overline{U}_{\text{ВХ}} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2$.

$$U_{\text{ВХ}\,a} = U_{1a} + U_{2a} = 20 \cdot \cos 120{,}2^\circ + 14{,}14 = 4{,}08 \text{ В},$$

$$U_{\text{ВХ}\,p} = U_{1p} + U_{2p} = 20 \cdot \sin 120{,}2^\circ - 4{,}14 = 13{,}15 \text{ В}.$$

Тогда действующее значение напряжения $\overline{U}_{\text{ВХ}}$:

$$U_{\text{ВХ}} = \sqrt{U_{\text{ВХ}\,a}^2 + U_{\text{ВХ}\,p}^2} = \sqrt{4{,}08^2 + 13{,}15^2} = 13{,}77 \text{ В},$$

и вектор $\overline{U}_{\text{ВХ}}$ составляет с горизонтальной осью угол

$$\theta_{U\text{вх}} = \operatorname{arctg}\frac{U_{\text{вх}p}}{U_{\text{вх}a}} = \operatorname{arctg}\frac{13{,}15}{4{,}08} = 72{,}8^\circ.$$

Полностью векторная диаграмма изображена на рис. 3.11. Как следует из диаграммы, цепь в целом имеет индуктивный характер, так как $\overline{U}_{\text{вх}}$ опережает $\overline{I}_{\text{вх}}$ по фазе.

Ответ: $I_{\text{вх}} = 3{,}42$ А, $U_{\text{вх}} = 13{,}77$ В

Задача 3.6

На входе пассивного двухполюсника известны напряжение и ток: $\underline{U} = 80 + j60$ В, $\underline{I} = 24 - j7$ А.

Вычислить комплексные сопротивление $\underline{Z}$ и проводимость $\underline{Y}$ и указать характер (индуктивный или емкостной) эквивалентного двухполюсника. Определить активную и реактивную составляющие тока и напряжения, активную, реактивную и полную мощности.

Решение

$$\underline{U} = \sqrt{80^2 + 60^2}\, e^{j\operatorname{arctg}\frac{60}{80}} = 100 e^{j36{,}87^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{I} = \sqrt{24^2 + 7^2}\, e^{j\operatorname{arctg}\frac{-7}{24}} = 25 e^{-j16{,}26^\circ} \text{ А}.$$

Построим векторную диаграмму напряжений и токов (рис. 3.12), где $\psi_u = 36{,}87^\circ$, $\psi_i = -16{,}26^\circ$.

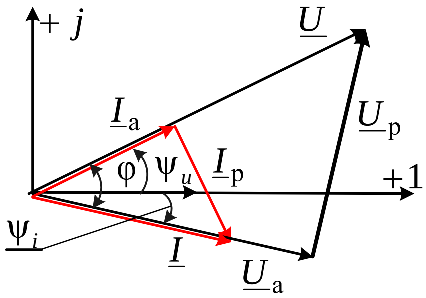


Рис. 3.12

Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100 e^{j36{,}87^\circ}}{25 e^{-j16{,}26^\circ}} = 4 e^{j53{,}13^\circ} = 2{,}4 + j3{,}2 \text{ Ом}.$$

Следовательно, эквивалентная схема замещения двухполюсника представляет собой последовательное соединение резистивного $R = 2{,}4$ Ом и индуктивного $X = 3{,}2$ Ом сопротивлений.

Комплексная проводимость двухполюсника:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{4 e^{j53{,}13^\circ}} = 0{,}25 e^{-j53{,}13^\circ} = 0{,}15 - j0{,}2 \text{ См}.$$

Параметрами эквивалентной параллельной схемы замещения являются активная $G = 0{,}15$ См и индуктивная $B = 0{,}2$ См проводимости.

Угол сдвига фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 36{,}87° - (-16{,}26°) = 53{,}13°.$$

Активные и реактивные составляющие напряжения и тока:

$$U_a = U\cos\varphi = 100 \cdot \cos 53{,}13^\circ = 60 \text{ В}, \quad I_a = I\cos\varphi = 25 \cdot \cos 53{,}13^\circ = 15 \text{ А},$$

$$U_p = U\sin\varphi = 100 \cdot \sin 53{,}13^\circ = 80 \text{ В}, \quad I_p = I\sin\varphi = 25 \cdot \cos 53{,}13^\circ = 20 \text{ А}.$$

Отметим, что активные и реактивные составляющие напряжения и тока – векторы на комплексной плоскости:

$$\underline{I}_a = 15e^{j36{,}87^\circ} \text{ А}, \qquad \underline{I}_p = 20e^{-j53{,}13^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{U}_a = 60e^{-j16{,}25^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_p = 80e^{j73{,}75^\circ} \text{ В}.$$

Следует обратить внимание на то, что вещественные и мнимые составляющие комплексных напряжения и тока, в общем случае, отличаются от их активных и реактивных составляющих.

Активная, реактивная и полная мощности:

$$P = R \cdot I^2 = 2{,}4 \cdot 25^2 = 1{,}5 \text{ кВт}, \quad Q = X \cdot I^2 = 3{,}2 \cdot 25^2 = 2{,}0 \text{ кВАр},$$

$$S = UI = 100 \cdot 25 = 2{,}5 \text{ кВА}.$$

Те же значения мощностей можно получить через комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока:

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}\,\underline{I}^* = (80 + j60) \cdot (24 + j7) = 1500 + j2000 \text{ ВА}.$$

Ответ: $\underline{Z} = 2{,}4 + j3{,}2$ Ом, $\underline{Y} = 0{,}15 - j0{,}2$ См, $\underline{I}_a = 15e^{j36{,}87^\circ}$ А, $\underline{I}_p = 20e^{-j53{,}13^\circ}$ А, $\underline{U}_a = 60e^{-j16{,}25^\circ}$ В, $\underline{U}_p = 80e^{j73{,}75^\circ}$ В, $P = 1{,}5$ кВт, $Q = 2{,}0$ кВАр, $S = 2{,}5$ кВА.

Задача 3.7

Определить входное сопротивление цепи (рис. 3.13). Найти все токи, напряжение между точками a и b и показание ваттметра, если приложенное напряжение составляет $U = 130$ В, а $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $X_L = 6$ Ом, $X_C = 5$ Ом.

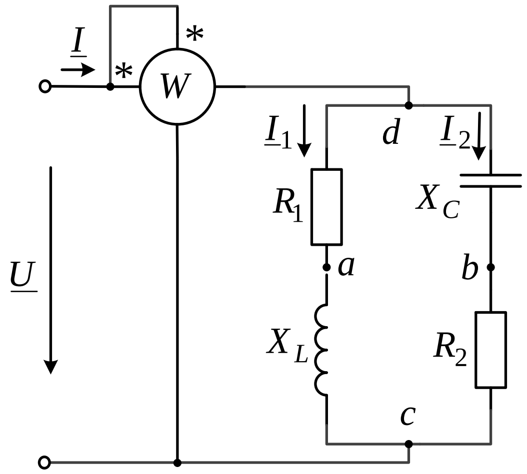


Рис. 3.13

Решение

Эквивалентное сопротивление двух параллельно соединенных ветвей с сопротивлениями

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 8 + j6 \text{ Ом} \quad \text{и} \quad \underline{Z}_2 = R_2 - jX_C = 12 - j5 \text{ Ом}$$

найдем по формуле:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(8 + j6)(12 - j5)}{8 + j6 + 12 - j5} = \frac{10e^{j36,87^\circ} \cdot 13e^{-j22,62^\circ}}{20,025e^{j2,86^\circ}} =$$

$$= 6,5e^{j11,39^\circ} = 6,36 + j1,28 \quad \text{Ом}.$$

Если $\underline{U}$ = 130 В, то токи равны :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{130e^{j0}}{8 + j6} = \frac{130e^{j0}}{10e^{j36,87^\circ}} = 13e^{-j36,87^\circ} = 10,4 - j7,8 \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{130e^{j0}}{12 - j5} = \frac{130e^{j0}}{13e^{-j22,62^\circ}} = 10e^{j22,62^\circ} = 9,23 + j3,85 \text{ А},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 10,4 - j7,8 + 9,23 + j3,85 = 19,63 - j3,95 = 20e^{-j11,39^\circ} \text{ А}.$$

Найдем комплекс напряжения между точками a и b:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ac} - \underline{U}_{cb} = jX_1 \cdot \underline{I}_1 - R_2 \cdot \underline{I}_2 = j6 \cdot (10,4 - j7,8) - 12(9,23 + j3,85) =$$

$$= -63,96 + j16,2 = 66 \cdot e^{j165,8^\circ} \text{ В}.$$

Определим показание ваттметра, величина которого равна активной мощности, потребляемой цепью. Найти ее можно разными способами:

$$P = UI\cos\varphi = 130 \cdot 20 \cdot \cos(11,39^\circ) = 2552 \text{ Вт}$$

или

$$P = P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 8 \cdot 13^2 + 12 \cdot 10^2 = 2552 \text{ Вт.}$$

Ответ: $\underline{Z} = 6{,}36 + j1{,}28$ Ом, $\underline{I}_1 = 13e^{-j36{,}87°}$ А, $\underline{I}_2 = 10e^{j22{,}62°}$ А, $\underline{I} = 20e^{-j11{,}39°}$ А, $\underline{U}_{ab} = 66 \cdot e^{j165{,}8^\circ}$ В, $P = 2552$ Вт.

Задача 3.8

Катушка с полным сопротивлением 100 Ом и коэффициентом мощности 0,6 соединена параллельно с конденсатором без потерь, сопротивление которого 20 Ом. Найти модуль входного сопротивления и коэффициент мощности пассивного двухполюсника.

Ответ: $Z = 23{,}6$ Ом, cosφ = 0,142.

Задача 3.9

Определить показания приборов в электрической цепи, изображенной на рис. 3.14, если $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $X_L = 10$ Ом, $X_C = 4$ Ом, $i(t) = 2\sin(\omega t + 20^\circ)$ А.

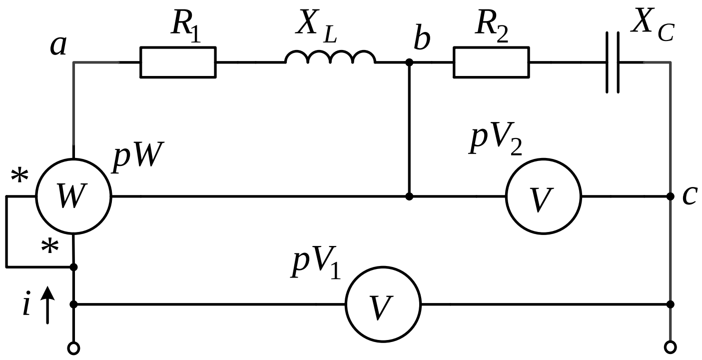


Рис. 3.14

Ответ: $pW = 4$ Вт, $pV_1 = 12$ В, $pV_2 = 8$ В.

Задача 3.10

Подобрать сопротивление R_1 так, чтобы напряжение $\underline{U}_{ab}$ опережало по фазе напряжение U на 30°, если $R_2 = 5$ Ом, $X_2 = 15$ Ом (рис. 3.15).

Ответ: $R_1 = 11{,}9$ Ом.

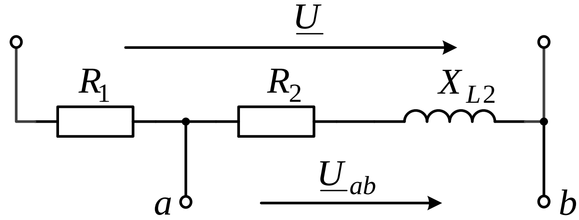


Рис. 3.15

Задача 3.11

Коэффициент мощности пассивной цепи, состоящей из последовательно соединенных реостата и конденсатора без потерь, равен 0,8. Каков будет коэффициент мощности параллельного соединения реостата и конденсатора?

Ответ: cosφ = 0,6.

Задача 3.12

В электрической цепи (рис. 3.16) известны действующие значения токов. Требуется качественно построить векторную диаграмму токов и напряжения, определить действующее значение неизвестного тока и найти разность фаз φ между напряжением и током в неразветвленной части цепи для следующих случаев:

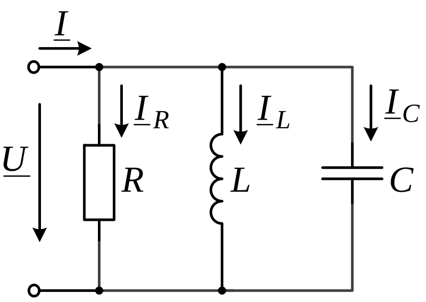


Рис. 3.16

1) $I_R = 3$ А, $I_L = 5$ А, $I_C = 1$ А, $I = ?$
2) $I_L = 0{,}4$ А, $I_C = 1{,}2$ А, $I = 1$ А, $I_R = ?$
3) $I_R = \sqrt{3}$ А, $I_L = 1$ А, $I = 2$ А, $I_C = ?$
4) $I_R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ А, $I_C = 2$ А, $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ А, $I_L = ?$

Ответ: 1) 5 А, 53,13°; 2) 0,6 А, −53,13°; 3) 0 или 2 А, 30° или –30°; 4) 3 А или 1 А, 60° или −60°.

Задача 3.13

Определить реактивное сопротивление X цепи (рис. 3.17), если известны показания приборов: pW=640 Вт, pV=80 В, pA=10 А.

Ответ: – 4,8 Ом.

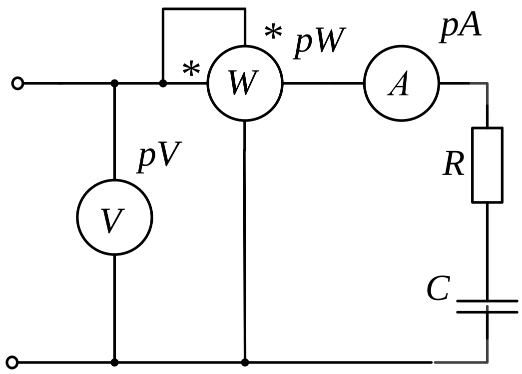


Рис. 3.17

4. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4.1. Краткие теоретические сведения

Метод контурных токов

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}\,\underline{Z}_{11} + \underline{I}_{22}\,\underline{Z}_{12} + \underline{I}_{33}\,\underline{Z}_{13} = \underline{E}_{11}; \\ \underline{I}_{11}\,\underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22}\,\underline{Z}_{22} + \underline{I}_{33}\,\underline{Z}_{23} = \underline{E}_{22}; \\ \underline{I}_{11}\,\underline{Z}_{31} + \underline{I}_{22}\,\underline{Z}_{32} + \underline{I}_{33}\,\underline{Z}_{33} = \underline{E}_{33}. \end{cases}$$

Метод узловых потенциалов

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_1\,\underline{Y}_{11} + \underline{\varphi}_2\,\underline{Y}_{12} + \underline{\varphi}_3\,\underline{Y}_{13} = \underline{J}_{11}; \\ \underline{\varphi}_1\,\underline{Y}_{21} + \underline{\varphi}_2\,\underline{Y}_{22} + \underline{\varphi}_3\,\underline{Y}_{23} = \underline{J}_{22}; \\ \underline{\varphi}_1\,\underline{Y}_{31} + \underline{\varphi}_2\,\underline{Y}_{32} + \underline{\varphi}_3\,\underline{Y}_{33} = \underline{J}_{33}. \end{cases}$$

Метод эквивалентного генератора

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{\text{ЭГ}}}{\underline{Z}_{\text{ЭГ}} + \underline{Z}_{\text{Н}}}.$$

Полная комплексная мощность

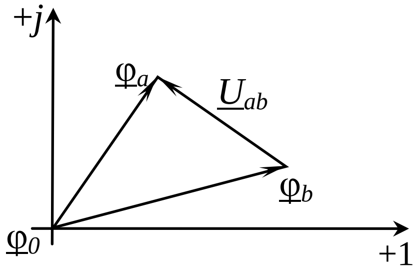
$$\underline{S} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}} = P + jQ$$

Баланс мощностей

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{S}_{\text{пр}}; \qquad \underline{S}_{\text{ист}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\underline{E}_i\,\overset{*}{I_i} + \underline{U}_{Ji}\,\overset{*}{J_i}\right) = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}},$$

$$\underline{S}_{\text{пр}} = \sum_{k=1}^{n}\underline{U}_k\,\overset{*}{\underline{I}_k} = \sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(R_k I_k^2 + jX_{Lk} I_{Lk}^2 - jX_{Ck} I_{Ck}^2\right)$$

Топографическая диаграмма



4.2. Примеры и задачи

Задача 4.1

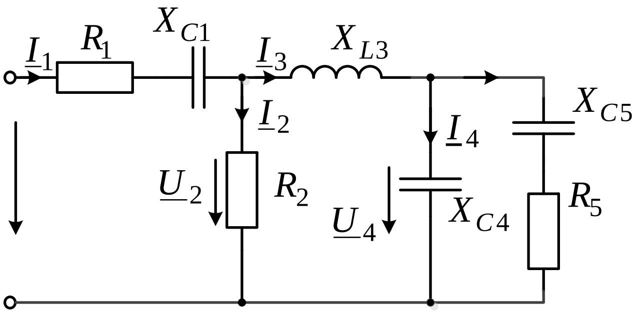


Рис. 4.1

$R_1 = 8$ Ом, $X_{C1} = 6$ Ом,
$R_2 = 20$ Ом, $X_{L3} = 40$ Ом,
$X_{C4} = 100$ Ом, $R_5 = 100$ Ом,
$X_{C5} = 100$ Ом, $U = 100$ В.

Рассчитать все токи и напряжения.

Записать мгновенные значения токов четвертой и пятой ветвей и напряжения на них. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Составить баланс мощностей.

Решение

Определим входное комплексное сопротивление цепи.

$$\underline{Z}_{4,5} = \frac{(-jX_{C4})\cdot(R_5 - jX_{C5})}{(-jX_{C4}) + (R_5 - jX_{C5})} = \frac{(-j100)\cdot(100 - j100)}{(-j100) + (100 - j100)} = (20 - j60) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3,4,5} = jX_{L3} + \underline{Z}_{4,5} = j40 + (20 - j60) = (20 - j20) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2-5} = \frac{R_2 \underline{Z}_{3,4,5}}{R_2 + \underline{Z}_{3,4,5}} = \frac{20(20 - j20)}{20 + (20 - j20)} = (12 - j4) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{\text{ЭКВ}} = R_1 - jX_{C1} + \underline{Z}_{2-5} = (8 - j6) + (12 - j4) = (20 - j10) \text{ Ом}.$$

Далее переходим к определению токов и напряжений ветвей, принимая напряжение на входе цепи $\underline{U} = 100$ В. Тогда, согласно закону Ома, ток первой ветви:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}} = \frac{100}{20 - j10} = (4 + j2) = 4{,}47e^{j26{,}57^\circ} \text{ А}.$$

Напряжения второй ветви:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{2-5} = (4 + j2)(12 - j4) = (56 + j8) = 56{,}6e^{8{,}13^\circ} \text{ В},$$

а ее ток, согласно закону Ома, равен

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2} = \frac{56 + j8}{20} = (2{,}8 + j0{,}4) = 2{,}83e^{j8{,}13^\circ} \text{ А}.$$

Согласно первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (4 + j2) - (2{,}8 + j0{,}4) = (1{,}2 + j1{,}6) = 2e^{j53{,}1^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение третьей ветви:

$$\underline{U}_3 = jX_{L3}\underline{I}_3 = j40\cdot(1{,}2 + j1{,}6) = (-64 + j48) = 80e^{j143{,}1^\circ}\ \text{В}.$$

Напряжение четвертой ветви:

$$\underline{U}_4 = \underline{I}_3\underline{Z}_{4,5} = (1{,}2 + j1{,}6)(20 - j60) = (120 - j40) = 126{,}5e^{-j18{,}4^\circ}\ \text{В}.$$

Токи в четвертой и пятой ветвях, соответственно, равны

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_4}{-jX_{C4}} = \frac{120 - j40}{-j100} = (0{,}4 + j1{,}2) = 1{,}265e^{j71{,}56^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = (1{,}2 + j1{,}6) - (0{,}4 + j1{,}2) = (0{,}8 + j0{,}4) = 0{,}894e^{j26{,}6^\circ}\ \text{А}.$$

По полученным комплексам токов и напряжений построена векторная диаграмма цепи (рис. 4.2) с иллюстрацией законов Кирхгофа.

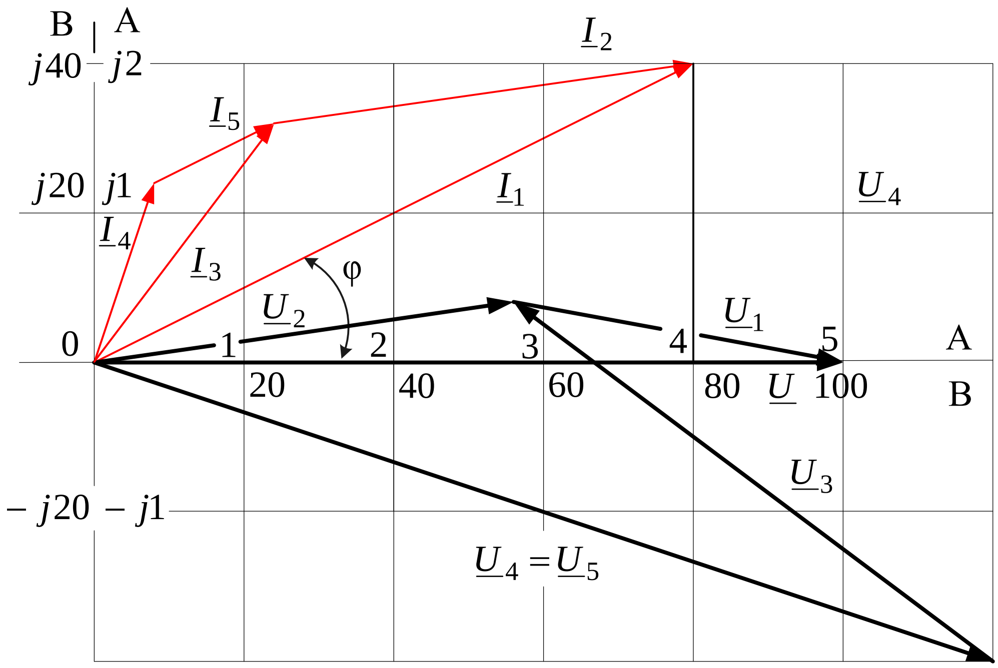


Рис. 4.2

Запишем мгновенные значения токов четвертой и пятой ветвей и напряжения на них. Вначале определим амплитудные значения токов и напряжения

$$I_{m4} = \sqrt{2}I_4 = \sqrt{2}\cdot 1{,}265 = 1{,}8\ \text{А},\quad I_{m5} = \sqrt{2}I_5 = \sqrt{2}\cdot 0{,}894 = 1{,}264\ \text{А},$$

$$U_{m4} = \sqrt{2}U_4 = \sqrt{2}\cdot 126{,}5 = 180\ \text{В},$$

мгновенные значения токов:

$$i_4 = 1{,}8\sin(\omega t + 71{,}56^\circ)\ \text{А},\quad i_4 = 1{,}264\sin(\omega t + 26{,}6^\circ)\ \text{А},$$

$$u_4 = 180\sin(\omega t + 18{,}4^\circ)\ \text{В}.$$

Комплексная мощность цепи равна

$$\underline{S} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}}_1 = P + jQ = 100(4 - j2) = (400 - j200) \text{ ВА}.$$

Отсюда $P = 400$ Вт, $Q = -200$ ВАр и цепь носит емкостной характер.

Потребляемая цепью активная мощность:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_5 I_5^2 = 8 \cdot 4{,}47^2 + 20 \cdot 2{,}83^2 + 100 \cdot 0{,}894^2 = 400 \text{ Вт}.$$

Потребляемая цепью реактивная мощность:

$$Q_{LC} = -X_{C1} I_1^2 + X_{L3} I_3^2 - X_{C4} I_4^2 - X_{C5} I_5^2 =$$

$$= -6 \cdot 4{,}47^2 + 40 \cdot 2^2 - 100 \cdot 1{,}265^2 - 100 \cdot 0{,}894^2 = -200 \text{ ВАр}.$$

Как видно, баланс мощностей соблюдается:

$$P = P_R, \quad Q = Q_{LC}.$$

Ответ: $\underline{I}_1 = 4{,}47e^{j26{,}57^\circ}$ А, $\underline{I}_2 = 2{,}83e^{j8{,}13^\circ}$ А, $\underline{I}_3 = 2e^{j53{,}1^\circ}$ А, $\underline{I}_4 = 1{,}265e^{j71{,}56^\circ}$ А, $\underline{I}_5 = 0{,}894e^{j26{,}6^\circ}$ А, $\underline{U}_2 = 56{,}6e^{8{,}13^\circ}$ В, $\underline{U}_3 = 80e^{j143{,}1^\circ}$ В, $\underline{U}_4 = 126{,}5e^{18{,}4^\circ}$ В, $P = 400$ Вт, $Q = -200$ Вар.

Задача 4.2

Для цепи, схема которой изображена на рис. 4.3, построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов, приняв $\underline{\varphi}_d = 0$, если $R = X_L = X_C = 1$ Ом, $\underline{I}_5 = 1$ А.

Определить $\underline{E}$.

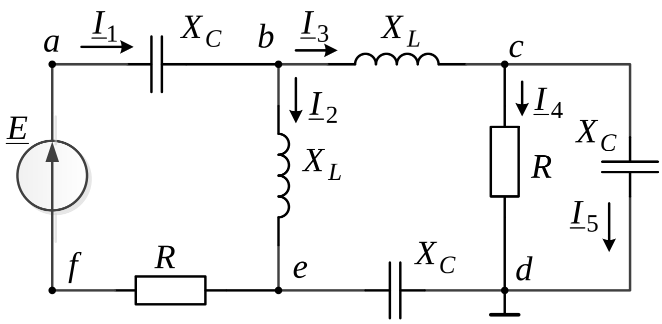


Рис. 4.3

Решение

Потенциал узла *c*:

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + (-jX_C) \cdot \underline{I}_5 = 0 - j1 \cdot 1 = -j1 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{\varphi}_c - \underline{\varphi}_d}{R} = \frac{-j1 - 0}{1} = -j1 \text{ А}.$$

На основании первого закона Кирхгофа для узла *c* вычислим ток

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 1 - j1 \text{ А}.$$

Потенциал узла *e*:

$$\underline{\varphi}_e = \underline{\varphi}_d - (-jX_C)\cdot \underline{I}_3 = 0 + j1\cdot(1 - j1) = 1 + j1 \text{ В},$$

потенциал узла *b*:

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + jX_L \cdot \underline{I}_3 = -j1 + j1\cdot(1 - j1) = 1 \text{ В}.$$

Ток $\underline{I}_2$ определим по закону Ома, зная потенциалы узлов *b* и *e*:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_b - \underline{\varphi}_e}{jX_L} = \frac{1-(1+j1)}{j1} = -1 \text{ А}.$$

Применяя первый закон Кирхгофа для узла *b*, найдем ток:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -1 + 1 - j1 = -j1 \text{ А}.$$

Теперь найдем потенциалы точек *a* и *f*:

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + (-jX_C)\cdot \underline{I}_1 = 1 - j1\cdot(-j1) = 0 \text{ В},$$

$$\underline{\varphi}_f = \underline{\varphi}_e - R\cdot \underline{I}_1 = (1 + j1) - 1\cdot(-j1) = 1 + j2 \text{ В}.$$

ЭДС $\underline{E}$ определим как разность потенциалов между точками *a* и *f*:

$$\underline{E} = \underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_f = 0 - (1 + j2) = -1 - j2 \text{ В}.$$

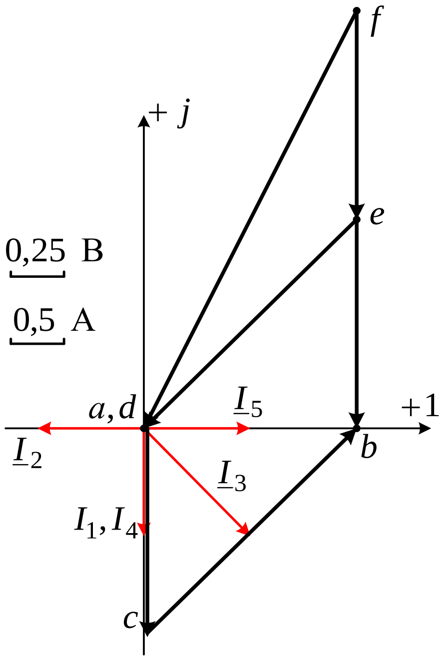


Рис. 4.4

Векторная диаграмма токов, совмещенная с топографической диаграммой напряжений, представлена на рис. 4.4.

Ответ: $E = -1 - j2$ В.

Задача 4.3

Методом контурных токов и методом узловых потенциалов определить токи ветвей, составить баланс мощностей и определить напряжение между точками *A* и *B* (рис. 4.5), если $R_1 = 2$ Ом, $X_{L1} = 2$ Ом, $X_{L2} = 2$ Ом, $X_{C3} = 2$ Ом, $X_{C4} = 2$ Ом, $X_{C5} = 2$ Ом, $\underline{E}_5 = 4 + j4$ В, $\underline{E}_6 = 2$В.

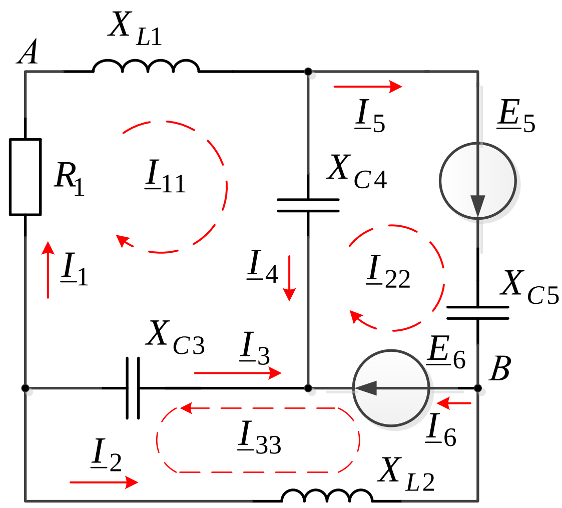


Рис. 4.5

Решение

1. Метод контурных токов

Система контурных уравнений для рассматриваемой схемы имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{22}, \\ \underline{Z}_{31}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{32}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{33}\underline{I}_{33} = \underline{E}_{33}. \end{cases}$$

Собственные сопротивления контуров:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + jX_{L1} - jX_{C3} - jX_{C4} = 2 + j2 - j2 - j2 = 2 - j2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{22} = -jX_{C4} - jX_{C5} = -j2 - j2 = -j4 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{33} = jX_{L2} - jX_{C3} = j2 - j2 = 0.$$

Для общих сопротивлений между контурами имеем:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(-jX_4) = j2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -(-jX_3) = j2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = 0.$$

Контурные ЭДС:

$$\underline{E}_{11} = 0; \qquad \underline{E}_{22} = \underline{E}_5 + \underline{E}_6 = 4 + j4 + 2 = 6 + j4 \text{В}, \qquad \underline{E}_{33} = \underline{E}_6 = 2 \text{В}.$$

После подстановки численных значений система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (2 - j2)\underline{I}_{11} + j2\underline{I}_{22} + (-j2)\underline{I}_{33} = 0, \\ j2\underline{I}_{11} + (-j4)\underline{I}_{22} + 0 \cdot \underline{I}_{33} = 6 + j4, \\ (-j2)\underline{I}_{11} + 0 \cdot \underline{I}_{22} + 0 \cdot \underline{I}_{33} = 2. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим контурные токи:

$$\underline{I}_{11} = j1 \text{ А}, \qquad \underline{I}_{22} = -1 + j2 \text{ А}, \qquad \underline{I}_{33} = j1 \text{ А}.$$

Далее определяем токи в ветвях схемы с учетом их направлений

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{33} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{11} - \underline{I}_{33} = -j1 - j1 = -j2 = 2e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = j1 - (-1 + j2) = 1 - j1 = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{22} = -1 + j2 = \sqrt{5}e^{116,57^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_6 = \underline{I}_{22} + \underline{I}_{33} = -1 + j2 + j1 = -1 + j3 = \sqrt{10}e^{j108,43^\circ} \text{ А}.$$

Проверим баланс активной и реактивной мощностей.

Суммарная комплексная мощность источников

$$\underline{S}_E = \underline{S}_{E5} + \underline{S}_{E6} = \underline{E}_5 \overset{*}{\underline{I}}_5 + \underline{E}_6 \overset{*}{\underline{I}}_6 = (4 + j4)(-1 - j2) + 2(-1 - j3) = 2 - j18 \text{ ВА}.$$

Активная и реактивная мощности источников:

$$P_E = 2 \text{ Вт}, \quad Q_E = -18 \text{ ВАр}.$$

В рассматриваемой цепи активная мощность потребляется только первой ветвью, т. е.

$$P_R = P_{R1} = R_1 I_1^2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \text{ Вт}.$$

Баланс активной мощности выполняется, поскольку $P_E = P_R$.

Реактивная мощность, потребляемая цепью:

$$Q_{LC} = Q_L - Q_C = X_{L1} I_1^2 + X_{L2} I_2^2 - (X_{C3} I_3^2 + X_{C4} I_4^2 + X_{C5} I_5^2) =$$

$$= 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (\sqrt{5})^2) = 4 - 22 = -18 \ \text{ВАр}.$$

Баланс реактивной мощности соблюдается, поскольку $Q_E = Q_{LC}$.

Найдем напряжение между точками A и B:

$$\underline{U}_{AB} = jX_{L2} \underline{I}_2 - R_1 \underline{I}_1 = j2 \cdot j1 - 2 \cdot j1 = -2 - j2 = 2{,}82 e^{-j135^\circ} \text{ В}.$$

Запишем мгновенные значения токов:

$$i_1 = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А}, \quad i_2 = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А},$$

$$i_3 = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ А}, \quad i_4 = 2 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А},$$

$$i_5 = \sqrt{10} \sin(\omega t + 116{,}57^\circ) \text{ А}, \quad i_6 = 2\sqrt{5} \sin(\omega t + 108{,}43^\circ) \text{ А}.$$

2. Метод узловых потенциалов

Система уравнений для схемы с четырьмя узлами содержит три уравнения. Однако рассматриваемая схема имеет особенность, которую нельзя не учесть при составлении системы узловых уравнений (рис. 4.6). Шестая ветвь содержит только идеальный источник ЭДС, и ее проводимость равна бесконечности. Поэтому в качестве опорного узла выбирают один из узлов, к которому подключена эта ветвь, например узел 0: $\underline{\varphi}_0 = 0$.

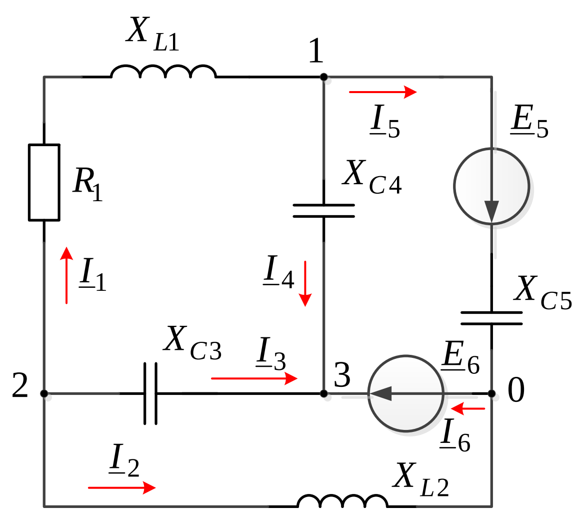


Рис. 4.6

Тогда потенциал узла 3 оказывается известным

$$\underline{\varphi}_3 = \underline{E}_6 = 2 \text{ В},$$

и составлять уравнение для этого узла уже не требуется.

Два оставшихся уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11}\underline{\varphi}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{\varphi}_2 + \underline{Y}_{13}\underline{\varphi}_3 = \underline{J}_{11}, \\ \underline{Y}_{21}\underline{\varphi}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{\varphi}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{\varphi}_3 = \underline{J}_{22}. \end{cases}$$

Собственные проводимости узлов:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1 + jX_{L1}} + \frac{1}{-jX_{C4}} + \frac{1}{-jX_{C5}} = \frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{-j2} =$$
$$= 0{,}25 + j0{,}75 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{R_1 + jX_{L1}} + \frac{1}{-jX_{C3}} + \frac{1}{jX_{L2}} = \frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{j2} = 0{,}25 - j0{,}25 \text{ См}.$$

Общие проводимости между узлами:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{R_1 + jX_{L1}} = -\frac{1}{2 + j2} = -0{,}25 + j0{,}25 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -\frac{1}{-jX_{C4}} = -\frac{1}{-j2} = -j0{,}5 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\frac{1}{-jX_{C3}} = -\frac{1}{-j2} = -j0{,}5 \text{ См}.$$

Узловые токи:

$$\underline{J}_{11} = -\frac{\underline{E}_5}{-jX_{C5}} = -\frac{4 + j4}{-j2} = 2 - j2 \text{ А},$$

$$\underline{J}_{22} = 0.$$

После подстановки численных значений и переноса в правую часть известных величин система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} (0,25 + j0,75)\underline{\varphi}_1 + (-0,25 + j0,25)\underline{\varphi}_2 = 2 - j2 - (-j0,5) \cdot 2, \\ (-0,25 + j0,25)\underline{\varphi}_1 + (0,25 - j0,25)\underline{\varphi}_2 = -(-j0,5) \cdot 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (0,25 + j0,75)\underline{\varphi}_1 + (-0,25 + j0,25)\underline{\varphi}_2 = 2 - j1, \\ (-0,25 + j0,25)\underline{\varphi}_1 + (0,25 - j0,25)\underline{\varphi}_2 = j1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим узловые потенциалы:

$$\underline{\varphi}_1 = -j2 \text{ В}, \qquad \underline{\varphi}_2 = -2 \text{ В}.$$

Далее, используя закон Ома, определяем токи ветвей:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1}{R_1 + jX_1} = \frac{-2 + j2}{2 + j2} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_0}{jX_{L2}} = \frac{-2}{j2} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3}{-jX_{C3}} = \frac{-2-2}{-j2} = -j2 = 2e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3}{-jX_{C4}} = \frac{-j2-2}{-j2} = 1 - j1 = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_0 + \underline{E}_5}{-jX_{C4}} = \frac{-j2+4+j4}{-j2} = -1 + j2 = \sqrt{5}e^{116,57^\circ} \text{ А}.$$

Ток $\underline{I}_6$ определяем, используя первый закон Кирхгофа:

$$\underline{I}_6 = -\underline{I}_3 - \underline{I}_4 = -(-j2) - (1 - j1) = -1 + j3 = \sqrt{10}e^{108,43^\circ} \text{ А}.$$

Полученные значения токов совпадают с найденными выше методом контурных токов.

Ответ: $\underline{I}_1 = 1e^{j90^\circ}$ А, $\underline{I}_2 = 1e^{j90^\circ}$ А, $\underline{I}_3 = 2e^{-j90^\circ}$ А, $\underline{I}_4 = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}$ А, $\underline{I}_5 = \sqrt{5}e^{116,57^\circ}$ А, $\underline{I}_6 = \sqrt{10}e^{108,43^\circ}$ А, $\underline{U}_{AB} = 2,82e^{-j135^\circ}$ В.

Задача 4.4

Определить показания приборов в электрической цепи (рис. 4.7), если $u(t) = 100 \sin\omega t$ В, $R = X_L = 5$ Ом, $X_C = 2,5$ Ом.

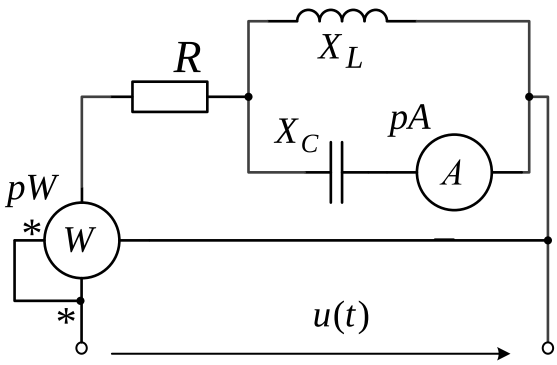


Рис. 4.7

Решение

Определим комплекс входного сопротивления цепи

$$\underline{Z} = R + jX = R + \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = 5 + \frac{j5(-j2,5)}{j5 - j2,5} = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Как видим, угол между приложенным напряжением и током в неразветвленной части цепи равен − 45°.

Приняв начальную фазу входного напряжения равной нулю, найдем комплекс действующего значения тока в неразветвленной части электрической цепи:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100/\sqrt{2}}{5-5j} = 10e^{j45°} \text{ A.}$$

Показание ваттметра определим по формуле

$$pW = P = UI\cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}}10 \cdot \cos 45° = 500 \text{ Вт.}$$

Обратим внимание на то, что показание ваттметра определяет мощность, выделяемую в резисторе:

$$P_R = I^2R = 10^2{\cdot}5 = 500 \text{ Вт.}$$

Ток в ветви с емкостью найдем по формуле разброса:

$$\underline{I}_C = \underline{I}\frac{jX_L}{jX_L - jX_C} = 10e^{j45°} \cdot \frac{j5}{j5 - j2{,}5} = 20e^{j45°} \text{ A.}$$

Амперметр покажет действующее значение этого тока 20А.

Ответ: pW = 500 Вт, pA = 20 А.

Задача 4.5

Составить баланс мощностей для цепи (рис. 4.8), если $\underline{E} = 10$ В, $\underline{J} = j2$ А, R = 10 Ом, $2X_L = X_C$ = 10 Ом.

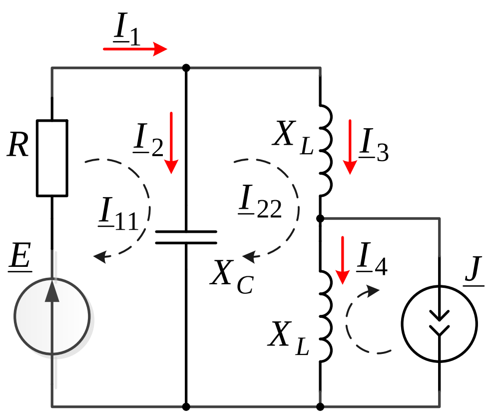


Рис. 4.8

Решение

Согласно методу контурных токов запишем уравнения, выбрав положительные направления контурных токов по часовой стрелке:

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(R - jX_C) - \underline{I}_{22}(-jX_C) = \underline{E}; \\ -\underline{I}_{11}(-jX_C) + \underline{I}_{22}(-jX_C + 2jX_L) = \underline{J}\,jX_L. \end{cases}$$

После подстановки численных значений система принимает вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(10 - j10) - \underline{I}_{22}(-j10) = 10; \\ -\underline{I}_{11}(-j10) + \underline{I}_{22}(-j10 + j10) = j2 \cdot j5. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с комплексными коэффициентами позволяет определить значения контурных токов:

$$\underline{I}_{11} = j1 \text{ А}, \qquad \underline{I}_{22} = -1 \text{ А}.$$

Далее определяем токи в ветвях схемы с учетом их направлений

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = j1 = 1e^{j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = j1 + 1 = \sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = -1 \text{ А},$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{22} - J = -1 - j2 = \sqrt{5}e^{-j116{,}57^\circ} \text{ А}.$$

Теперь составим баланс мощностей.

Полная комплексная мощность источника ЭДС

$$\underline{S}_E = \underline{E}\overset{*}{\underline{I}}_1 = 10 \cdot (-j1) = -j10 \text{ ВА}.$$

Полная комплексная мощность источника тока

$$\underline{S}_J = \underline{U}_J \overset{*}{\underline{J}} = (-10 + j5) \cdot (-j2) = 10 + j20 \text{ ВА},$$

где $\underline{U}_J = -jX_L \underline{I}_4 = -j5 \cdot (-1 - j2) = -10 + j5$ В.

Таким образом, полная комплексная мощность источников:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{S}_E + \underline{S}_J = -j10 + 10 + j20 = 10 + j10 \text{ ВА},$$

а полная комплексная мощность приемников:

$$\underline{S}_{\text{пр}} = \sum_{k=1}^{4} \underline{Z}_k I_k^2 = R_1 I_1^2 - jX_C I_2^2 + jX_L I_3^2 + jX_L I_4^2 =$$

$$= 10 \cdot 1^2 - j10 \cdot (\sqrt{2})^2 + j5 \cdot 1^2 + j5 \cdot (\sqrt{5})^2 = 10 + j10 \text{ ВА}.$$

Таким образом, полная комплексная мощность источников равна комплексной мощности приемников. Баланс соблюдается.

Ответ: $\underline{S}_{\text{ист}} = 10 + j10$ ВА, $\underline{S}_{\text{пр}} = 10 + j10$ ВА.

Задача 4.6

Применив теорему об эквивалентном генераторе, определить мощность, выделяемую в резисторе с сопротивлением $R_{\text{Н}} = 70$ Ом (рис. 4.9), если действующее значение приложенного напряжения равно 100 В, $X_1 = 60$ Ом, $X_2 = 40$ Ом, $X_3 = 50$ Ом, $X_4 = 50$ Ом.

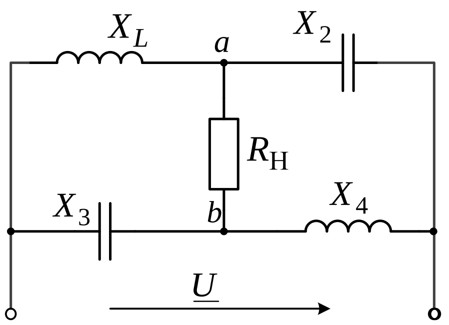


Рис. 4.9

Решение

Применим теорему об эквивалентном генераторе для нахождения тока в сопротивлении $R_Н$. Определить параметры эквивалентного генератора ЭДС из режима холостого хода не удается, так как по ветви с сопротивлениями X_3 и X_4 в этом случае протекает бесконечно большой ток, т. к. $jX_3 - jX_4 = 0$.

Найдем параметры эквивалентного генератора тока из режима короткого замыкания (рис. 4.10).

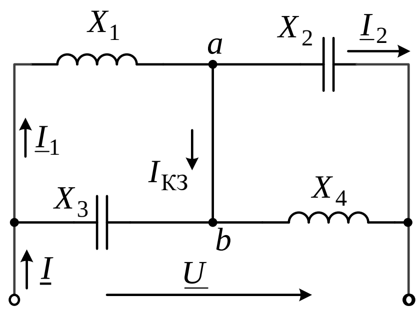


Рис. 4.10

Входное сопротивление цепи в режиме короткого замыкания ветви с сопротивлением $R_Н$:

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{jX_1(-jX_3)}{jX_1 - jX_3} + \frac{jX_4(-jX_2)}{jX_4 - jX_2} = \frac{j60(-j50)}{j60 - j50} + \frac{j50(-j40)}{j50 - j40} = -j500 \quad Ом.$$

Ток в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{100}{-j500} = j0{,}2 \text{ А.}$$

Токи в первой и второй ветвях определим по формуле разброса:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\frac{-jX_3}{jX_1 - jX_3} = j0{,}2 \cdot \frac{-j50}{j60 - j50} = -j1 \text{А,}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}\frac{jX_4}{jX_4 - jX_2} = j0{,}2 \cdot \frac{j50}{j50 - j40} = j1 \text{ А.}$$

Для узла a по первому закону Кирхгофа можно записать:

$$\underline{I}_{КЗ} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = -j1 - j1 = -j2 \text{ А.}$$

Это и есть ток эквивалентного генератора тока $J_{ЭГ}$. Внутренняя проводимость эквивалентного генератора равна нулю, так как входное сопротивление относительно зажимов a и b в режиме холостого хода равно:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{jX_4(-jX_3)}{jX_4 - jX_3} + \frac{jX_1(-jX_2)}{jX_1 - jX_2} = \frac{j50(-j50)}{j50 - j50} + \frac{j60(-j40)}{j60 - j40} = \infty.$$

Окончательно найдем мощность, выделяемую на резисторе с сопротивлением $R_Н$:

$$P_{\text{Н}} = I_{\text{КЗ}}^2 R_{\text{Н}} = 2^2 \cdot 70 = 280 \text{ Вт.}$$

Ответ: $P_{\text{Н}} = 280$ Вт.

Задача 4.7

В цепи с зависимым источником (рис. 4.11) определить токи в ветвях, потенциалы точек 1 и 2 и отношение $\dfrac{\underline{\varphi}_2}{\underline{J}}$, если $\underline{J} = 1$ мА, $\beta = 10$, $R_{\text{Г}} = 20$ Ом, $R_{\text{Н}} = R_2 = 40$ Ом, $R_1 = X_{\text{C}} = 10$ Ом.

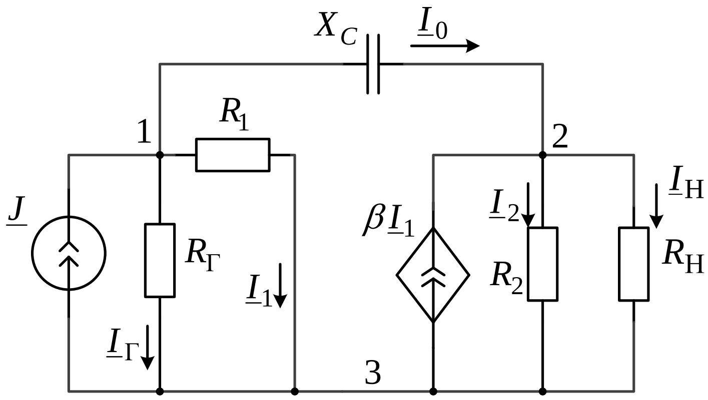


Рис. 4.11

Решение

Составим уравнения по методу узловых потенциалов при условии, что $\underline{\varphi}_3 = 0$:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{R_{\text{Г}}} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{-jX_C}\right) - \underline{\varphi}_2 \dfrac{1}{-jX_C} = \underline{J}, \\ -\underline{\varphi}_1 \dfrac{1}{-jX_C} + \underline{\varphi}_2\left(\dfrac{1}{R_{\text{Н}}} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{-jX_C}\right) = \beta \underline{I}_1 = \beta \dfrac{\underline{\varphi}_1}{R_1}, \end{cases}$$

так как: $\underline{I}_1 = {}^{\underline{\varphi}_1}\!\big/_{R_1}$.

Подставим численные значения параметров и сгруппируем их:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{-j10}\right) - \underline{\varphi}_2 \dfrac{1}{-j10} = 10^{-3}, \\ -\underline{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{-j10} + \dfrac{10}{10}\right) + \underline{\varphi}_2\left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{-j10}\right) = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений с комплексными коэффициентами, получим:

$$\underline{\varphi}_1 = 1{,}39 e^{j148^\circ} \text{ мВ}, \qquad \underline{\varphi}_2 = 12{,}5 e^{j90^\circ} \text{ мВ}.$$

Токи в ветвях находятся в соответствии с законом Ома:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{\varphi}_1-\underline{\varphi}_3}{R_1}=\frac{1{,}39e^{j148^\circ}-0}{10}=0{,}1390\,e^{j148^\circ}\,\text{мА};$$

$$\underline{I}_\Gamma=\frac{\underline{\varphi}_1-\underline{\varphi}_3}{R_\Gamma}=\frac{1{,}39e^{j148^\circ}-0}{20}=0{,}0695\,e^{j148^\circ}\,\text{мА};$$

$$\underline{I}_0=\frac{\underline{\varphi}_1-\underline{\varphi}_2}{-jX_C}=\frac{1{,}39e^{j148^\circ}-12{,}5e^{j90^\circ}}{-j10}=1{,}1829\ e^{-j5{,}7^\circ}\ \text{мА};$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{\varphi}_2-\underline{\varphi}_3}{R_2}=\frac{12{,}5e^{j90^\circ}}{40}=0{,}3125\,e^{j90^\circ}\,\text{мА};$$

$$\underline{I}_\text{Н}=\frac{\underline{\varphi}_2-\underline{\varphi}_3}{R_\text{Н}}=\frac{12{,}5e^{j90^\circ}-0}{40}=0{,}3125\,e^{j90^\circ}\ \text{мА}.$$

Отношение $\dfrac{\underline{\varphi}_2}{\underline{J}}=\dfrac{12{,}5e^{j90^\circ}\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-3}}=12{,}5e^{j90^\circ}$ Ом.

Ответ: $\underline{I}_0=1{,}1829\ e^{-j5{,}7^\circ}$ мА, $\underline{I}_1=0{,}1390\,e^{j148^\circ}$ мА, $\underline{I}_2=0{,}3125\,e^{j30^\circ}$ мА, $\underline{I}_\Gamma=0{,}0695\,e^{j148^\circ}$ мА, $\underline{I}_\text{Н}=0{,}3125\,e^{j90^\circ}$ мА, $\underline{\varphi}_1=1{,}39e^{j148^\circ}$ мВ, $\underline{\varphi}_2=12{,}5e^{j90^\circ}$ мВ, $\dfrac{\underline{\varphi}_2}{\underline{J}}=12{,}5e^{j90^\circ}$ Ом.

Задача 4.8

Для измерения параметров конденсаторов применяют электрическую цепь, построенную по схеме уравновешенного моста (рис. 4.12), где R_2 = 160 Ом, R_3 = =3,2 кОм, R_4 = 40 Ом, C_4=0,1 мкФ.

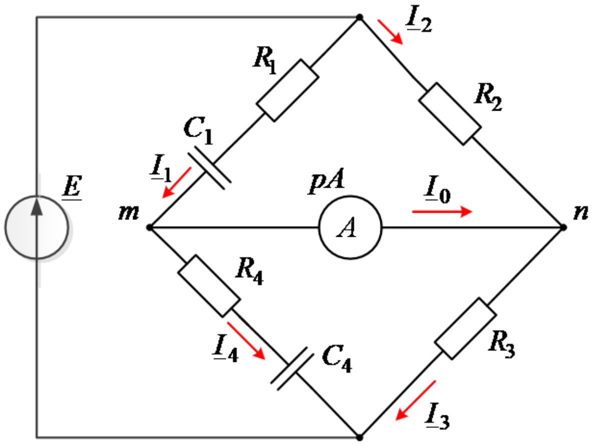


Рис. 4.12

Вывести условия равновесия моста (отсутствие тока в средней ветви), определить емкость конденсатора C_1, тангенс угла потерь tgδ, если измерения проводились на частоте 1000 Гц.

Решение

Условия равновесия моста $\underline{I}_1 = 0$ при $\underline{\varphi}_m = \underline{\varphi}_n$.

Эти условия приводят к уравнениям:

$$\begin{cases} \underline{I}_1(R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}) = \underline{I}_2 R_2, \\ \underline{I}_4(R_4 + \dfrac{1}{j\omega C_4}) = \underline{I}_3 R_3, \end{cases}$$

и равенствам:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_4, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_3,$$

совместное решение которых

$$(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})R_3 = R_2(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4})$$

приводит к двум выражениям:

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3}, \quad C_1 = \frac{C_4 R_3}{R_2}.$$

Окончательно получаем:

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} = \frac{160 \cdot 40}{3{,}2 \cdot 10^3} = 2 \text{ Ом},$$

$$C_1 = \frac{C_4 R_3}{R_2} = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}2 \cdot 10^3}{160} = 2 \text{ мкФ}.$$

Тангенс угла потерь

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R_1}{1/(\omega C_1)} = \omega C_1 R_1 = 2\pi \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cong 0{,}025\,.$$

Ответ: C_1 = 2 мкФ, tgδ = 0,025.

Задача 4.9

На рис. 4.13 показана схема части электрической цепи, для которой $\underline{I}_1 = 10e^{j37^\circ}$ А, $\underline{I}_3 = 8e^{-j15^\circ}$ А, $\underline{Z}_1 = 2$ Ом, $\underline{Z}_2 = 1{,}8e^{-j44^\circ}$ Ом. Определить показание ваттметра.

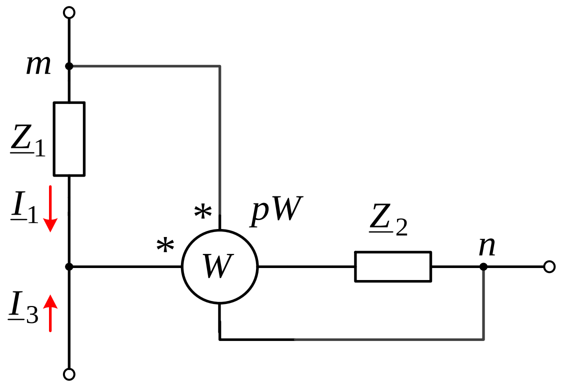


Рис. 4.13

Ответ: $pW = 638{,}4$ Вт.

Задача 4.10

Для электрической цепи, схема которой представлена на рис. 4.14, определить потенциалы и построить топографическую диаграмму, приняв потенциал точки *d* равным нулю, и векторную диаграмму токов, если $\underline{I}_5 = 1$ А, $X_1 = X_3 = X_6 = X_7 = 1$ Ом, $X_2 = X_4 = R_5 = 2$ Ом.

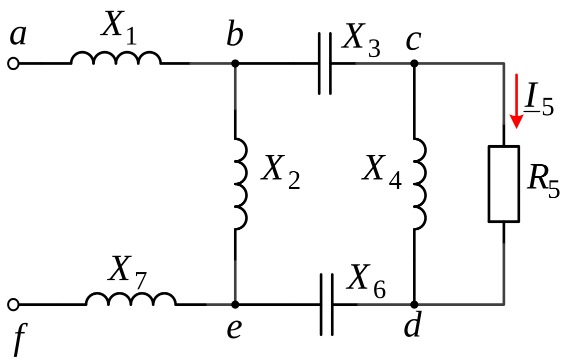


Рис. 4.14

Ответ: $\underline{\varphi}_a = 2 - j1$ В, $\underline{\varphi}_b = 1 - j1$ В, $\underline{\varphi}_c = 2$ В, $\underline{\varphi}_e = 1 + j1$ В, $\underline{\varphi}_f = j1$ В.

Задача 4.11

Определить напряжение $\underline{U}_{ab}$ (рис. 4.15) при $\underline{E}_1 = 6$ В, $\underline{E}_2 = j6$ В, $R = X_L = X_C = 3$ Ом.

Ответ: $\underline{U}_{ab} = 9 - j3$ В.

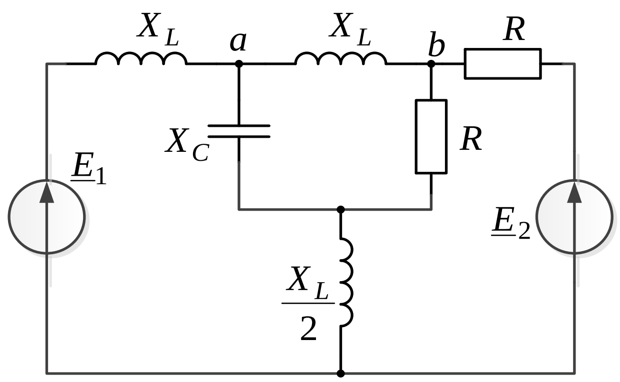


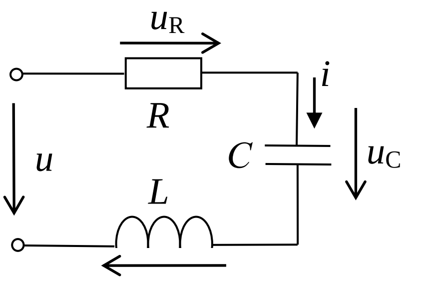
Рис. 4.15

5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

5.1. Краткие теоретические сведения

Резонанс напряжений

$$\varphi = 0, \quad \mathrm{Im}[\,\underline{Z}\,] = 0$$

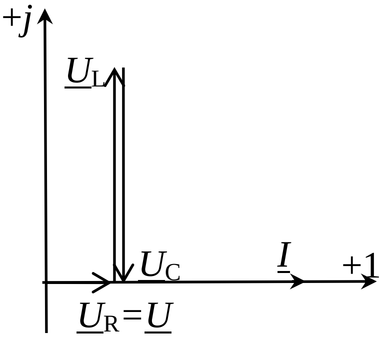


$$\varphi = \mathrm{arctg}(X_L - X_C)/R = 0$$

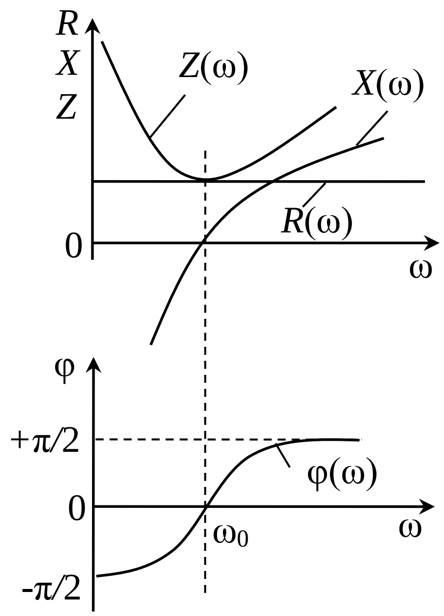
$$X_L = X_C$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

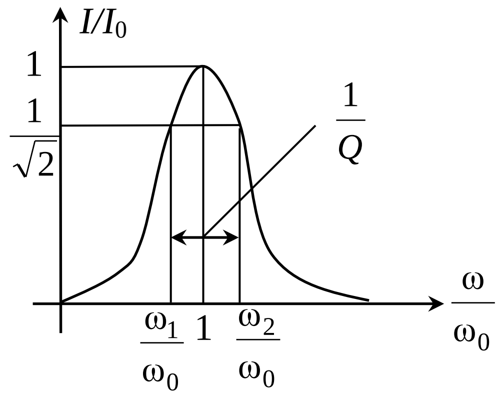
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Частотные характеристики



Резонансные кривые



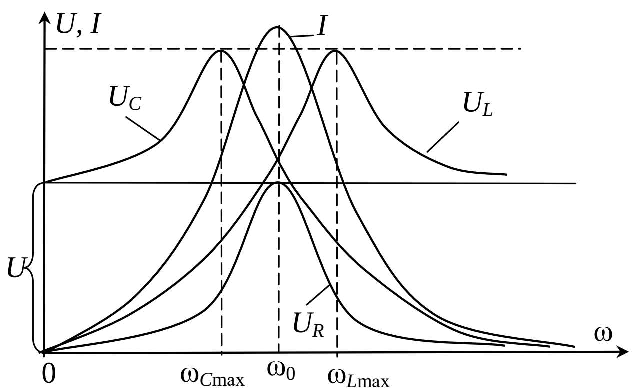
$$\omega_{1,2} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{d^2}{4}} \mp \frac{d}{2}\right) \qquad \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 d$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \qquad \xi = 2Q\,\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{X}{R}$$

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

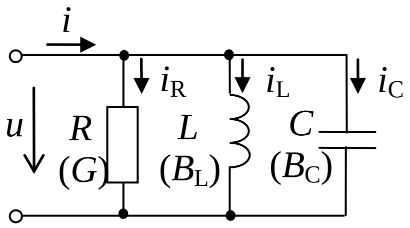
$$Q = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{U_{C0}}{U_0} = \frac{\rho}{R}$$

$$d = \frac{1}{Q}$$



$$\omega_{C\max} = \omega_0\sqrt{\frac{2-d^2}{2}}, \qquad \omega_{L\max} = \omega_0\sqrt{\frac{2}{2-d^2}}$$

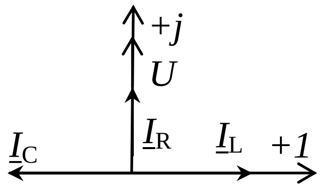
Резонанс токов



$$\varphi = 0$$

$$\mathrm{Im}[\,\underline{Y}\,] = 0$$

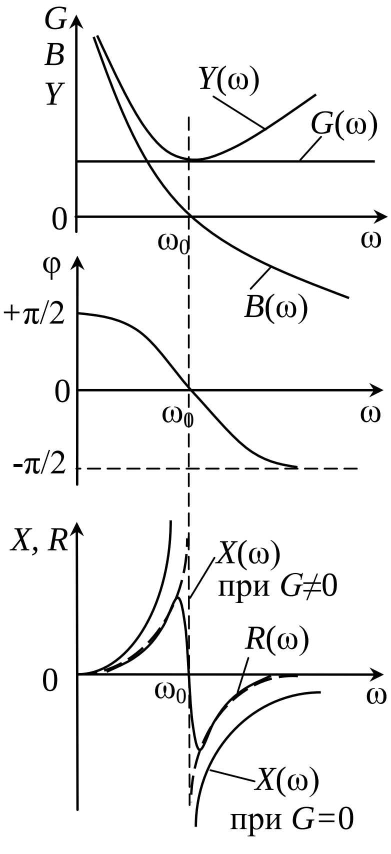
$$B_L = B_C \qquad \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$$



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \gamma = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

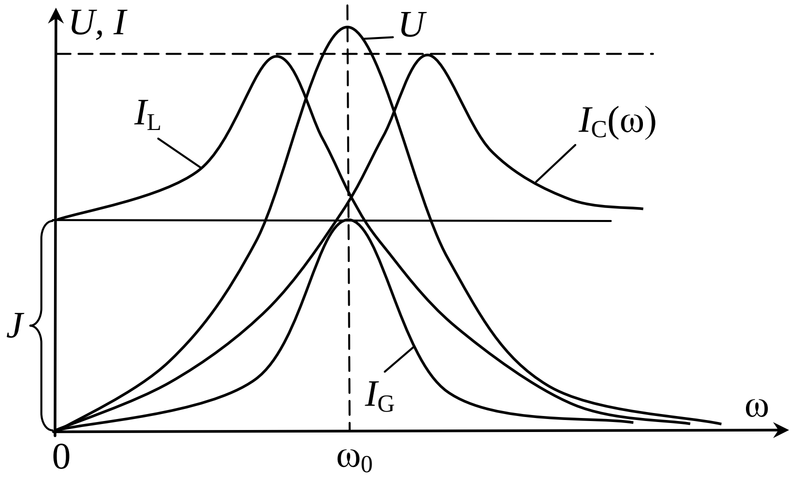
$$Q = \gamma / G \qquad d = 1/Q$$

Частотные характеристики

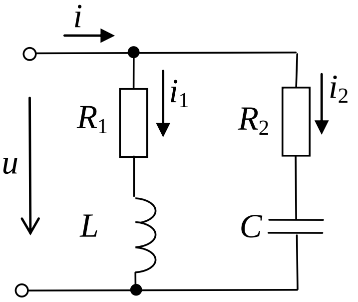


Резонансные кривые

I = const



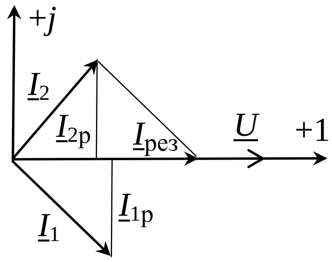
$$Q = \frac{\rho\left(\omega_{рез} / \omega_0\right)}{R_1 + R_2\left(\omega_{рез} / \omega_0\right)^2} \qquad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



$$B_1 = B_2$$

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}$$



$$I_{1р} = I_{2р}$$

5.2. Примеры и задачи

Задача 5.1

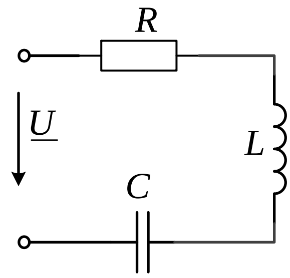


Рис. 5.1

Контур состоит из последовательно соединенных сопротивления R, индуктивности L, емкости C и источника синусоидального напряжения, при этом $R = 20$ Ом, $L = 10$ мГн, $U = 40$ мВ, $\omega = 10^6\,\text{с}^{-1}$.

Определить резонансное значение емкости C, добротность контура при резонансе, значение тока при резонансе, относительную и обобщенную расстройки контура и значение тока при увеличении частоты напряжения на 1% и найденной величине емкости.

Решение

При резонансе напряжений в данной цепи выполняется условие

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

из которого несложно получить выражение для резонансной емкости

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^{12} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 10^{-10}\,\Phi = 100\ \text{пФ}.$$

Добротность контура при резонансе

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\dfrac{1}{\omega C_0}}{R} = \frac{\dfrac{1}{10^6 \cdot 10^{-10}}}{20} = 500.$$

Ток при резонансе

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{40}{20} = 2\ \text{мА}.$$

Определим значение частоты, на которой необходимо определить расстройку:

$$\omega_1 = (1 + 0{,}01) \cdot \omega_0 = 1{,}01 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда относительная $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$ и обобщенная ξ расстройки, соответственно, равны:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{(1{,}01-1)\cdot 10^6}{10^6} = 0{,}01,$$

$$\xi = 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{X}{R} = 2\cdot 500\cdot 0{,}01 = 10.$$

Ток на частоте ω_1 равен:

$$I_1 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\xi R)^2}} = \frac{40}{\sqrt{20^2 + (10\cdot 20)^2}} = 0{,}199\,\text{мА}.$$

Ответ: $C_0 = 100$ пФ, $Q = 500$, $I_0 = 2$ мА, $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0{,}01$, $\xi = 10$, $I_1 = 0{,}199$ мА.

Задача 5.2

Найти параметры и граничные частоты полосы пропускания последовательного контура (рис. 5.1), добротность которого равна 50, характеристическое сопротивление 2 кОм и резонансная частота 1 МГц.

Вычислить относительную и обобщенную расстройки при верхней граничной частоте.

Решение

Из формул для резонансной частоты ω_0 и характеристического сопротивления ρ

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

определим значения индуктивности и емкости контура:

$$L = \frac{\rho}{\omega_0} = \frac{2\cdot 10^3}{2\cdot\pi\cdot 10^6} = 0{,}3185\cdot 10^{-3} = 0{,}3185\ \text{мГн},$$

$$C = \frac{1}{\omega_0\rho} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^3} = 7{,}96\cdot 10^{-11}\,\text{Ф} = 79{,}6\ \text{пФ}.$$

А используя формулу для добротности

$$Q = \frac{\rho}{R},$$

определим значение активного сопротивления:

$$R = \frac{\rho}{Q} = \frac{2 \cdot 10^3}{50} = 40 \text{ Ом.}$$

Граничные частоты полосы пропускания

$$f_{\text{в}} = f_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}+\frac{1}{2Q}\right) = 10^6 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 50^2}}+\frac{1}{2\cdot 50}\right) = 1\ 010\ 050 \text{ Гц,}$$

$$f_{\text{н}} = f_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}-\frac{1}{2Q}\right) = 10^6 \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 50^2}}-\frac{1}{2\cdot 50}\right) = 990\ 050 \text{ Гц.}$$

Относительная и обобщенная расстройки на частоте $\omega_{\text{В}}$, соответственно, равны:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{\text{в}} - f_0}{f_0} = \frac{(1{,}01005 - 1)\cdot 10^6}{10^6} = 0{,}01005 ,$$

$$\xi = 2Q\frac{\Delta f}{f_0} = 2\cdot 50 \cdot 0{,}01005 = 1{,}005 .$$

Ответ: $L = 0{,}3185$ мГн, $C = 79{,}6$ пФ, $R = 40$ Ом, $f_{\text{в}} = 1010050$ Гц, $f_{\text{н}} = 990050$ Гц, $\Delta f / f = 0{,}01005$, $\xi = 1{,}005$.

Задача 5.3

Для измерения параметров катушки используют Q-метр (рис. 5.2), принцип действия которого основан на явлении резонанса напряжений.

Определить параметры катушки R и L, если известно, что при резонансе $U_{mn} / U_{ab} = 100$, $C = 10^4$ пФ, $f_0 = 10$ кГц.

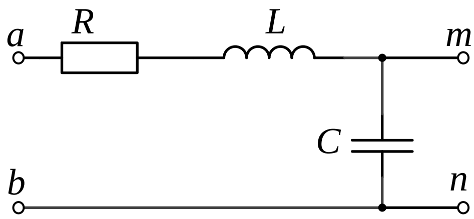


Рис. 5.2

Решение

Резонансная частота контура

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ Гц.}$$

Отсюда индуктивность катушки:

$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} = \frac{1}{(2\pi\cdot 10^4)^2\cdot 10^{-8}} = 0{,}0253 \text{ Гн.}$$

Добротность контура:

$$Q=\frac{U_{mn}}{U_{ab}}=\frac{U_{C_0}}{U}=\frac{\rho}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}=100\ .$$

Активное сопротивление катушки равно

$$R=\frac{\sqrt{L/C}}{Q}=\frac{\sqrt{0{,}0253/10^4\cdot 10^{-12}}}{100}=15{,}9\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R=15{,}9$ Ом, $L=0{,}0253$ Гн.

Задача 5.4

Определить показания вольтметров, включенных в цепь, настроенную в резонанс, причем $I_1 = I_2$, $U_1 = 100$ В, $U_2 = 40$ В (рис. 5.3).

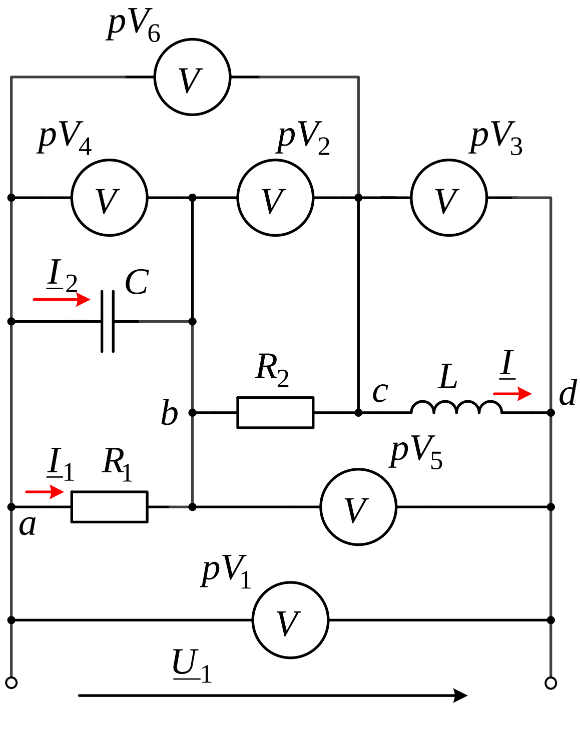


Рис.5.3

Решение

Построим векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

Примем потенциал точки a равным нулю. Вектор напряжения $\underline{U}_{ba} = \underline{U}_4$ отложим по действительной оси (рис. 5.4).

Ток $\underline{I}_1$ в активном сопротивлении R_1 совпадает по фазе с напряжением $\underline{U}_{ba}$. Ток $\underline{I}_2$ опережает по фазе напряжение $\underline{U}_{ba}$ на 90°. Общий ток $\underline{I}$ равен геометрической сумме токов $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ и опережает по фазе напряжение $\underline{U}_{ba}$ на 45°, т. к. $I_1 = I_2$.

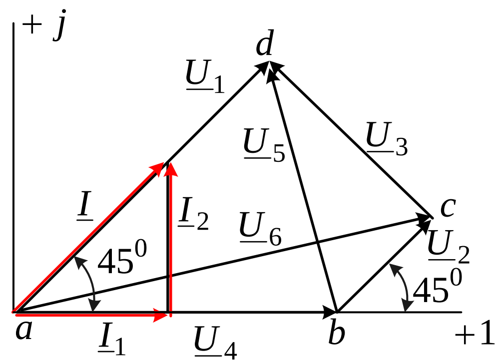


Рис. 5.4

Из точки b параллельно току $\underline{I}$ откладываем вектор напряжения $\underline{U}_{cb} = \underline{U}_2$ на активном сопротивлении R_2 и из точки c − вектор напряжения на индуктивности $\underline{U}_{dc} = \underline{U}_3$, опережающий по фазе ток $\underline{I}$ на 90°. Получаем точку d.

Сумма векторов $\underline{U}_{ba}$, $\underline{U}_{cb}$ и $\underline{U}_{dc}$ равна вектору напряжения питания $\underline{U}_{da}$ = $\underline{U}_1$, которое совпадает по фазе с током $\underline{I}$, т. к. в цепи наблюдается резонанс.

Из диаграммы следует, что

$$U_{dc} = U_3 = U_1 - U_2 = 100 - 40 = 60 \text{ В},$$

$$U_{ba} = U_4 = (U_1 - U_2)\sqrt{2} = (100 - 40)\sqrt{2} = 84{,}85 \text{ В},$$

$$U_{db} = U_5 = \sqrt{U_3^2 + U_2^2} = \sqrt{60^2 + 40^2} = 72{,}11 \text{ В},$$

$$U_{ca} = U_6 = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116{,}61 \text{ В}.$$

Эту задачу можно решить и без построения диаграмм.

Из условия $I_1 = I_2$ следует, что $R_1 = X_C$.

Из условия резонанса $Jm[\,\underline{Z}\,] = 0$ найдем X_L:

$$Jm[\,\underline{Z}\,] = X_L - \frac{X_C R_1^2}{R_1^2 + X_C^2} = 0.$$

Тогда при $R_1 = X_C$ получим

$$X_L = \frac{R_1}{2}.$$

Если принять начальную фазу тока I равной нулю, то

$$\underline{U}_2 = R_2 \cdot \underline{I} = 40 B,$$

$$\underline{U}_1 = \operatorname{Re}[\underline{Z}] \cdot \underline{I} = (R_2 + \frac{R_1 X_C^2}{R_1^2 + X_C^2}) \cdot \underline{I} = R_2 \cdot \underline{I} + \frac{R_1}{2} \cdot \underline{I} = 100 \text{ В}.$$

Тогда

$$R_1 \cdot \underline{I} = 120 \text{ В}.$$

Найдем комплексные значения напряжений:

$$\underline{U}_3 = jX_L \cdot \underline{I} = j\frac{R_1}{2} \cdot \underline{I} = j60 \text{ В},$$

$$\underline{U}_4 = \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} \cdot \underline{I} = \frac{R_1(-jR_1)}{R_1 - jR_1} \cdot \underline{I} = \frac{R_1 \cdot \underline{I}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j45^\circ} =$$

$$= \frac{120}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j45^\circ} = 84{,}85 \cdot e^{-j45^\circ} = 60 - j60 \text{ В},$$

$$\underline{U}_5 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 40 + j60 = 72{,}11 \cdot e^{j56{,}3^\circ} \text{В},$$

$$\underline{U}_6 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 40 + 60 - j60 = 116{,}61 \cdot e^{-j31^\circ} \text{В}.$$

Полученные результаты совпали с результатами, найденными с помощью векторных диаграмм.

Ответ: pV_1 = 100 В, pV_2 = 40 В, pV_3 = 60 В, pV_4 = 84,853 В, pV_5 = 72,11 В, pV_6 = 116,61 В.

Задача 5.5

Для цепи (рис. 5.5) в режиме резонанса известны показания приборов $pW = 4$ Вт, $pV = 1$ В и индуктивное сопротивление $X_L = 2$ Ом.

Определить активное сопротивление R и емкостное сопротивление X_C.

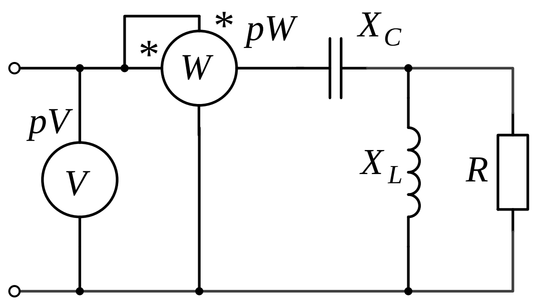


Рис. 5.5

Решение

При резонансе входное напряжение и входной ток совпадают по фазе. Тогда $\varphi = 0$ и $I_C = \dfrac{P_W}{U_V} = \dfrac{4}{1} = 4$ А.

Комплексное входное сопротивление

$$\underline{Z} = -jX_C + \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j\left(\frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} - X_C\right)$$

при резонансе становится чисто активным. Тогда

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\underline{Z} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = \frac{U_V}{I_C} = \frac{1}{4} \text{ Ом}.$$

Отсюда получим уравнение

$$R^2 - 4X_L^2 R + X_L^2 = R^2 - 16R + 4 = 0.$$

Решив это уравнение, находим величину сопротивления. Она равна: а) $R = 15{,}75$ Ом; б) $R = 1{,}97$ Ом.

Из условия равенства нулю мнимой части входного сопротивления при резонансе находим емкостное сопротивление:

$$X_C = \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

Отсюда а) если $R = 15{,}75$ Ом, то $X_C = 0{,}25$ Ом; б) если $R = 1{,}97$ Ом, то $X_C = 0{,}03$ Ом.

На рис. 5.6 представлена качественная диаграмма токов и напряжений в цепи для режима резонанса.

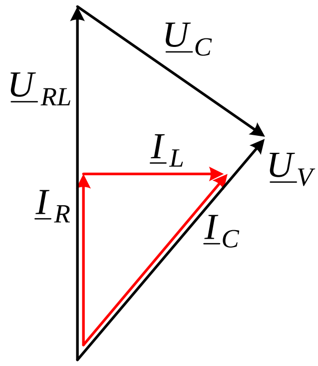


Рис. 5.6

Для проверки правильности решения проверим выполнение баланса мощностей для варианта а).

Активная и реактивная мощности источника:

$$P_{ИСТ} = U_V I_C \cos\varphi = 1 \cdot 4 \cdot \cos 0 = 4 \text{ Вт},$$

$$Q_{ИСТ} = U_V I_C \sin\varphi = 1 \cdot 4 \cdot \sin 0 = 0.$$

Примем комплекс входного напряжения $\underline{U}_V = U_V e^{j0} = 1 \cdot e^{j0}$ В и найдем напряжение на участке с параллельным соединением R и X_L. При этом учтем что при резонансе $\underline{I}_C = 4e^{j0}$ А.

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_V - \underline{I}_C(-jX_C) = 1 + j4 \cdot 1{,}97 = 1 + 7{,}88 = 7{,}943 e^{j82{,}77^0} \text{ В}.$$

Потребляемая цепью активная мощность:

$$P_R = I_R^2 R = \frac{U_{RL}^2}{R} = \frac{7{,}943^2}{15{,}75} = 4 \text{ Вт}.$$

Баланс активной мощности соблюдается.

Потребляемая цепью реактивная мощность:

$$Q_{LC} = Q_L + Q_C = I_L^2 X_L - I_C^2 X_C = \frac{U_{RL}^2}{X_L} - I_C^2 X_C =$$

$$= \frac{7{,}943^2}{2} - 4^2 \cdot 1{,}97^2 = 31{,}54 - 31{,}53 \approx 0.$$

Баланс реактивной мощности также соблюдается: $Q_{ИСТ} = Q_{LC}$.

Ответ: 15,75 Ом и 1,97 Ом или 0,25 Ом и 0,03 Ом.

Задача 5.6

Резонансный контур состоит из трех катушек и конденсатора (рис. 5.7).

Доказать, что независимо от положения переключателя частота резонанса токов остается неизменной, если пренебречь активным сопротивлением ветвей.

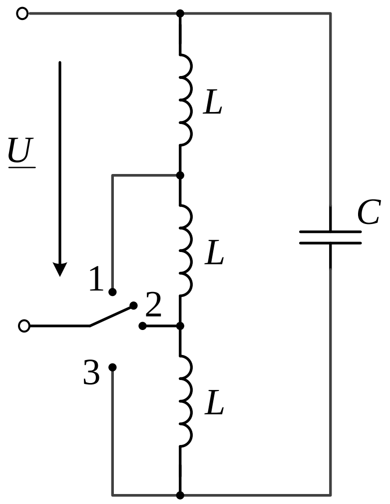


Рис. 5.7

Решение

Обозначим число катушек в индуктивной ветви буквой n, а число катушек в емкостной ветви − k.

Условие резонанса $B_L = B_C$ в идеальном параллельном контуре приводит к равенству

$$-\frac{1}{X_1} = \frac{1}{X_2}, \quad \text{где} \quad X_1 = n\omega L, \quad X_2 = k\omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Тогда
$$\omega_р = \frac{1}{\sqrt{(n+k)LC}}$$

остается неизменной при всех положениях переключателя.

Задача 5.7

Определить резонансные угловые частоты и токи (рис. 5.8): L =4 Гн, C_1 = 3 мкФ, C_2 = 1 мкФ, R = 100 Ом, U = 200 В.

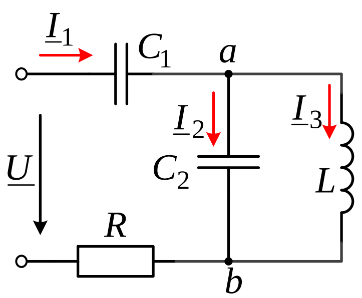


Рис. 5.8

Решение

В данной цепи возможны два резонансных режима: резонанс токов в контуре, состоящем из катушки индуктивности L и конденсатора C_2, а также резонанс напряжений на входе всей цепи.

Угловая частота резонанса напряжений находится из условия:

$$\mathrm{Jm}\,[\underline{Z}_{вх}] = X = 0.$$

Входное сопротивление цепи равно

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{j\omega L(-j\frac{1}{\omega C_2})}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}},$$

тогда
$$X = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L\frac{1}{\omega C_2}}{\omega L - \frac{1}{\omega C_2}} = 0\,.$$

Откуда частота резонанса напряжений

$$\omega_{0\text{н}} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{4(3\cdot 10^{-6} + 10^{-6})}} = 250\ \text{с}^{-1}.$$

При резонансе напряжений ток I_1 совпадает по фазе с приложенным напряжением U и равен:

$$\underline{I}_{10\text{н}} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{200}{100} = 2\ \text{А}.$$

Напряжение $\underline{U}_{ab}$ на параллельном контуре L, C_2 при этом равно:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_{10\text{н}}(-j\frac{\omega_{0\text{н}}L}{\omega_{0\text{н}}^2 LC_2 - 1}) = 2(-j\frac{250\cdot 4}{250^2\cdot 4\cdot 10^{-6} - 1}) = j\frac{8}{3}\cdot 10^3\ \text{В}.$$

Тогда токи $\underline{I}_3$ и $\underline{I}_2$ соответственно равны:

$$\underline{I}_{30\text{н}} = \frac{\underline{U}_K}{j\omega_{0\text{н}}L} = \frac{j\frac{8}{3}\cdot 10^3}{j250\cdot 4} = \frac{8}{3}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_{20\text{н}} = \frac{\underline{U}_K}{-j\frac{1}{\omega_{0\text{н}}C_2}} = \frac{j\frac{8}{3}\cdot 10^3}{-j\frac{1}{250\cdot 10^{-6}}} = -\frac{2}{3}\ \text{А}.$$

При резонансе токов реактивная проводимость параллельного контура $Jm[\underline{Y}] = B = 0$. Угловая частота резонанса токов определяется по формуле:

$$\omega_{0\text{т}} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 1\cdot 10^{-6}}} = 500\ \text{с}^{-1}.$$

Реактивное сопротивление параллельного соединения равно бесконечности и ток на входе цепи $\underline{I}_{10\text{т}}$ равен нулю. Индуктивный и емкостный ток при этом определяются следующим образом:

$$\underline{I}_{30\text{Т}} = \frac{\underline{U}}{j\omega_{0\text{т}}L} = \frac{200}{j500\cdot 4} = -j0{,}1\ \text{А},$$

$$\underline{I}_{20\text{Т}} = \frac{\underline{U}}{-j\dfrac{1}{\omega_{0\text{т}}C_2}} = \frac{200}{-j\dfrac{1}{500\cdot 10^{-6}}} = j0{,}1\ \text{А}.$$

Ответ: РН: $\omega_{0\text{н}} = 250\ \text{с}^{-1}$, $\underline{I}_{10\text{н}} = 2\text{А}$, $\underline{I}_{20\text{н}} = -\dfrac{2}{3}\ \text{А}$, $\underline{I}_{30\text{н}} = \dfrac{8}{3}\ \text{А}$;

РТ: $\omega_{0\text{т}} = 500\ \text{с}^{-1}$, $\underline{I}_{10\text{т}} = 0$, $\underline{I}_{20\text{т}} = j0{,}1\ \text{А}$, $\underline{I}_{30\text{т}} = -j0{,}1\ \text{А}$.

Задача 5.8

Найти емкость C конденсатора, при которой действующее значение тока I не зависит от сопротивления резистора R (рис. 5.9), если $\omega = 10^4$ рад/сек, $L = 0{,}1$ Гн. Определить, как изменится этот ток, если катушку и конденсатор поменять местами.

Решение

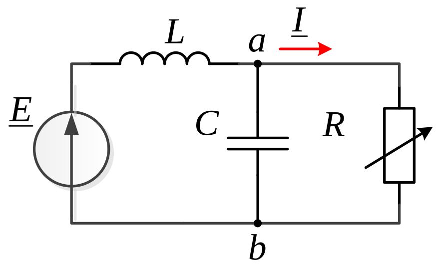


Рис. 5.9

Заменим цепь относительно зажимов ab эквивалентным источником тока. При условии $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ эквивалентная схема показана на рис. 5.10.

$$\underline{J}_{\text{эг}} = \underline{I}_{\text{кз}} = \frac{\underline{E}}{j\omega L}, \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{эг}}} = 0.$$

Таким образом, при

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^8\cdot 0{,}1} = 10^{-7}\ \text{Ф}$$

ток I не зависит от сопротивления резистора R.

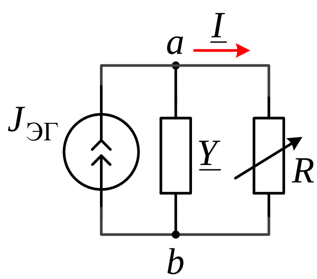


Рис. 5.10

Ответ: $C = 0{,}1\cdot 10^{-6}$ Ф. Действующее значение тока не изменится, но его фаза изменится на 180°.

Задача 5.9

В цепи, изображенной на рис. 5.11, имеет место резонанс токов. Амперметры показывают $I_2 = I_3 = 1$ А. Определить показание амперметра pA_1.

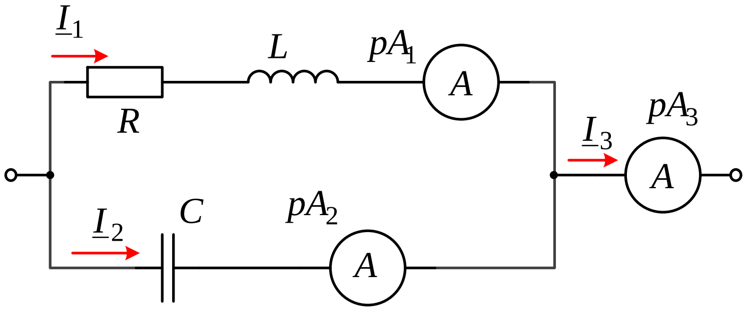


Рис. 5.11

Решение

Пусть начальная фаза входного напряжения равна ψ_u. При резонансе ток $\underline{I}_3$ имеет такую же начальную фазу. Тогда $\underline{I}_3 = I_3 e^{j\psi_u} = 1 \cdot e^{j\psi_u}$. При этом ток ветви с конденсатором опережает входное напряжение на $\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)} = 1 \cdot e^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Ток ветви с индуктивностью можно определить, используя первый закон Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 1e^{j\psi_u} - 1e^{j\left(\psi_u + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\psi_u}(1 - j) = \sqrt{2}e^{j\psi_u}e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Первый амперметр покажет модуль этого тока, т. е. $I_3 = \sqrt{2}$ А.

Решение нетрудно получить, используя векторную диаграмму (рис. 5.12), построенную в следующей последовательности:

$$\underline{U} \to \underline{I}_3 \to \underline{I}_2 \to -\underline{I}_2 \to \underline{I}_1.$$

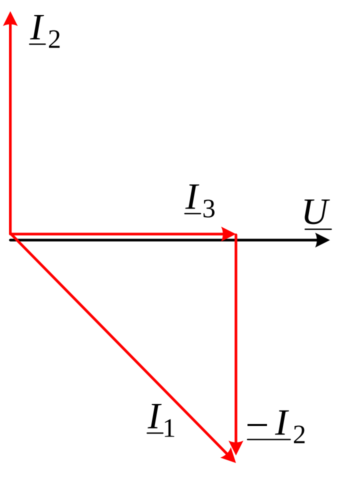


Рис. 5.12

Ответ: $I_3 = \sqrt{2}$ А.

Задача 5.10

При каком X_2 в цепи рис. 5.13 наступит резонанс токов и каковы будут при этом токи I, I_1, и I_2?
$R = 8$ Ом, $R_1 = 40$ Ом, $X_1 = 30$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $U = 120$ В.

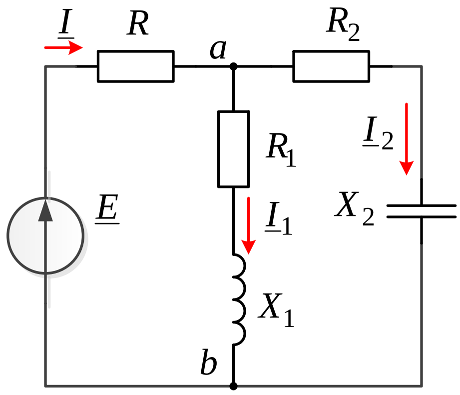


Рис. 5.13

Решение

При резонансе мнимая часть суммарной проводимости параллельного контура равна нулю. Комплексные проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + jX_1} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - jX_2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} + j\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}.$$

В режиме резонанса:

$$Jm(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) = -\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 0.$$

Подставив численные параметры элементов, получим:

$$-\frac{30}{40^2 + 30^2} + \frac{X_2}{40^2 + X_2^2} = 0.$$

Отсюда получим: а) $X_2 = 30$ Ом; б) $X_2 = 53{,}33$ Ом.

Для вычисления токов предварительно вычисляем суммарное сопротивление $\underline{Z}_{12}$ параллельного контура, которое при резонансе носит чисто активный характер.

Подробное решение приведем для случая а), когда $X_2 = 30$ Ом.

$$\underline{Z}_{12} = \operatorname{Re}(\underline{Z}_{12}) = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \frac{1}{\operatorname{Re}(\underline{Y}_{12})} = \frac{1}{\dfrac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \dfrac{R_2}{R_2^2 + X_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{40}{40^2 + 30^2} + \dfrac{40}{40^2 + 30^2}} = 31{,}25 \text{ Ом}.$$

Тогда

$$I = \frac{E}{R + R_{12}} = \frac{120}{8 + 31,25} = 3,06 \text{ А}.$$

Напряжение параллельного контура:

$$U_{ab} = E - IR = 120 - 3,06 \cdot 8 = 95,52 \text{ В}.$$

Тогда

$$I_1 = U_{ab} Y_1 = U_{ab} \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2}\right)^2} = \frac{95,52}{50} = 1,91 \text{ А},$$

$$I_2 = U_{ab} Y_2 = U_{ab} \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}\right)^2} = \frac{95,52}{50} = 1,91 \text{ А}.$$

Проделав аналогичные вычисления для случая б) при $X_2 = 53,33$ Ом получим:

$$\underline{Z}_{12} = R_{12} = 40 \text{ Ом}, \; I = 2,5 \text{ А}, \; I_1 = 2 \text{ А}, \; I_2 = 1,5 \text{ А}.$$

Ответ: а) $X_2 = 30$ Ом, $I = 3,06$ А, $I_1 = 1,91$ А, $I_2 = 1,91$ А;
б) $X_2 = 53,33$ Ом, $I = 2,5$ А, $I_1 = 2$ А, $I_2 = 1,5$ А.

Задача 5.11

Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных катушки с активным сопротивлением R = 10 Ом и индуктивностью L = 100 мкГн и конденсатора с емкостью C = 100 пФ.

Определить резонансную частоту ω_0, характеристическое сопротивление ρ, затухание d и добротность Q, расходуемую мощность P и абсолютное значение полосы пропускания контура, если приложенное напряжение составляет U = 1 В.

Ответ: $\omega_0 = 10^7$ с$^{-1}$, ρ = 1000 Ом, d = 0,01, Q = 100, P_0=0,1 Вт, $2\Delta f_0$ = 16 кГц.

Задача 5.12

На рис. 5.14 показана резонансная кривая последовательного контура при приложенном напряжении 100 В. Определить полосу пропускания $\omega_2 - \omega_1$, добротность контура Q, параметры контура R, L, C и комплексные мощности $\underline{S}_1$ и $\underline{S}_2$ на граничных частотах ω_1 и ω_2.

Ответ: $\omega_2 - \omega_1 = 0{,}21 \cdot 10^3\,\text{с}^{-1}$,
L = 4,77·10^{-2} Гн, Q = 4,77,
R = 10 Ом, C = 2,1·10^{-5} Ф,
$\underline{S}_1$= 500 – j503 ВА,
$\underline{S}_2$ = 500 + j499 ВА.

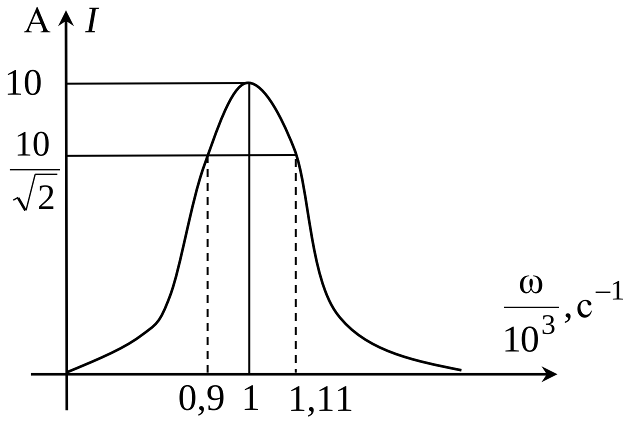


Рис. 5.14

Задача 5.13

Определить частоту и индуктивность, если цепь находится в режиме резонанса (рис. 5.15).
$J(t)$ = 10sinωt А, R = 10 Ом, C =1 мкФ, pV =10 / $\sqrt{2}$ В.

Ответ: 10^6 с$^{-1}$, 10^{-6} Гн.

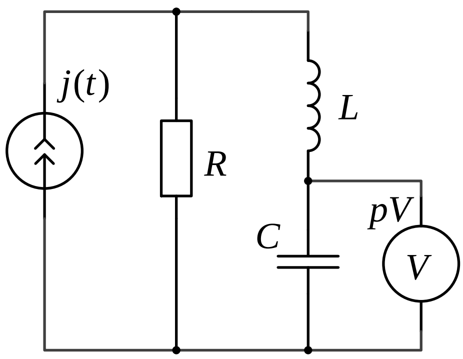


Рис. 5.15

Задача 5. 14

Для цепи рис. 5.16 даны параметры $R = 10$ Ом, $\omega = 10^4$ с$^{-1}$. При каких значениях L и C входное сопротивление цепи чисто активное и равно 1 Ом?

Ответ: $L = 0{,}3$ мГн, $C = 30$ мкФ.

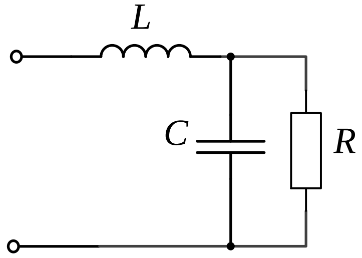


Рис. 5.16

Задача 5. 15

Для цепи рис. 5.17 найти значение индуктивности L_0, при котором ток i совпадает по фазе с напряжением питания u. Построить частотную характеристику входного реактивного сопротивления.
$R = 5$ Ом, $L = 4$ мГн, $C = 50$ мкФ, $\omega = 4 \cdot 10^3$ с$^{-1}$.

Ответ: $L_0 = 1{,}82$ мГн.

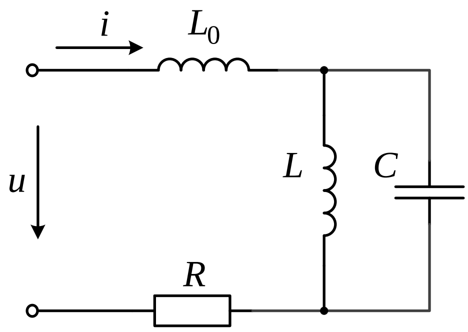


Рис. 5.17

Задача 5.16

Определить емкость цепи, если в заданной цепи (рис. 5.18) резонанс токов наступает при частоте ω = 2000 рад/с и индуктивности L = 0,1 Гн.

Ответ: 2,5 мкФ.

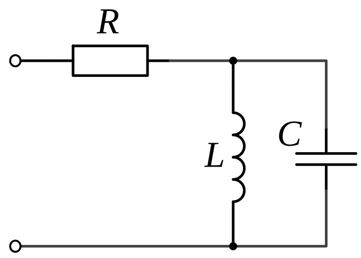


Рис. 5.18

Задача 5.17

Добротность катушки $Q_L = \dfrac{\omega L}{R}$ при резонансной частоте (рис. 5.19) равна 4. После настройки в резонанс частоту входного напряжения увеличили вдвое.

Как следует изменить емкость конденсатора, чтобы цепь при увеличенной частоте вновь оказалась бы в режиме резонанса?

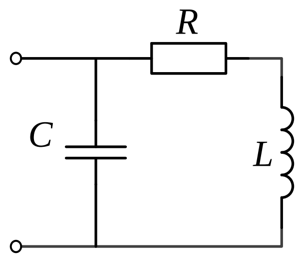


Рис. 5.19

Ответ: C_2 = 0,262·C_1.

Задача 5.18

Элементы цепи рис. 5.20 имеют следующие параметры:
$R_1 = 20$ Ом, $R_1 = 40$ Ом,
$L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 40$ мГн,
$C_1 = 50$ мкФ, $C_2 = 25$ мкФ,
$i = \sqrt{2}\sin 1000t$.

Определить показания приборов и напряжение на входе цепи.

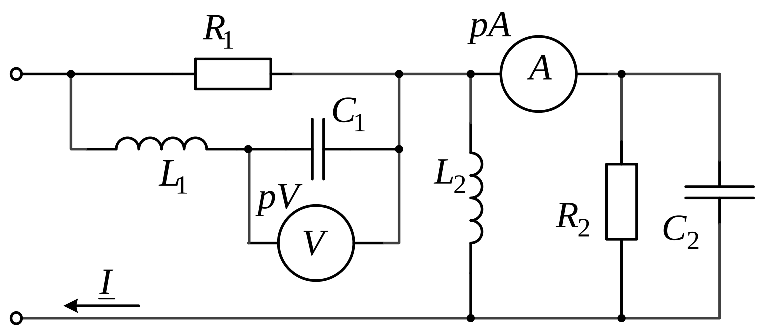
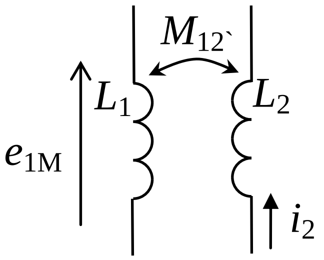


Рис. 5.20

Ответ: $pA = \sqrt{2}$ А, $pV = 1$ В, $U = 40$ В.

6. ЦЕПИ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

6.1. Краткие теоретические сведения



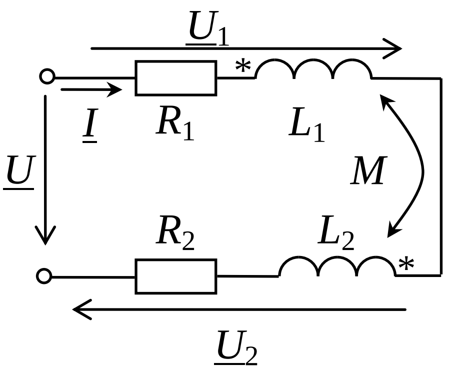
$$e_{1M} = -\,d\Psi_{12}/\,dt\; = -\,M_{12}\,di_2/\,dt$$

$$\underline{E}_{1M} = -\,j\omega\underline{\psi}_{12} = -\,j\omega M_{12}\,\underline{I}_2$$

$$M = M_{12} = M_{21}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1} X_{L2}}}, \qquad 0 \le k < 1$$

Последовательное соединение



$$u = u_1 + u_2 =$$

$$= [R_1 i + L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}] +$$

$$+ [R_2\, i + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}]$$

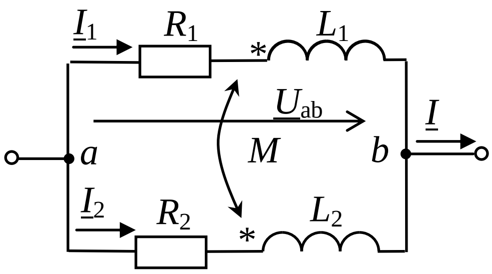
$$\underline{U} = \underline{I}\,[(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M) +$$

$$+ (R_2 + j\omega L_2 + j\omega M)] = \underline{I}\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

$$\underline{Z}_{\text{согл}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

$$\underline{Z}_{\text{встр}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

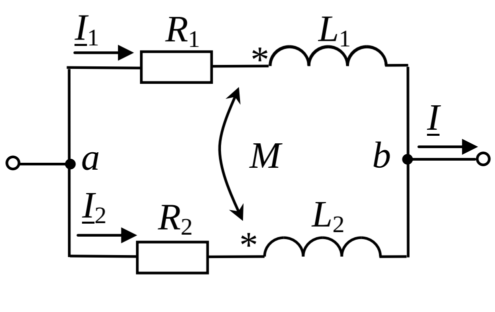
Параллельное соединение



$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{ab} = R_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\,\underline{I}_2 \\ \underline{U}_{ab} = R_2\underline{I}_2 + j\omega L_2\underline{I}_2 + j\omega M\,\underline{I}_1 \end{cases}$$

Развязка индуктивных связей

Схема с индуктивной связью Эквивалентная схема без индуктивной связи



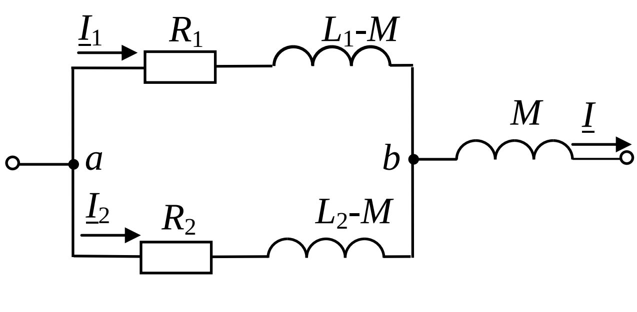
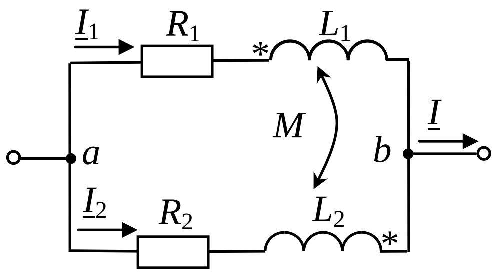
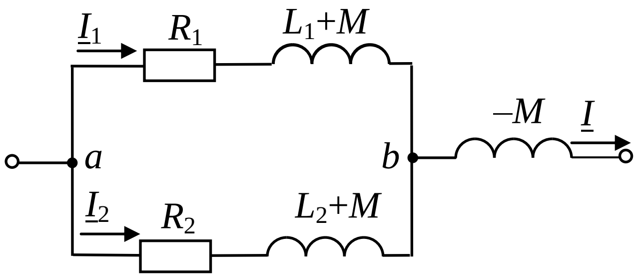
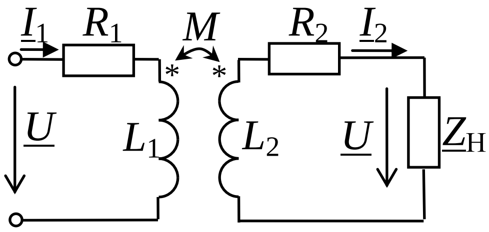


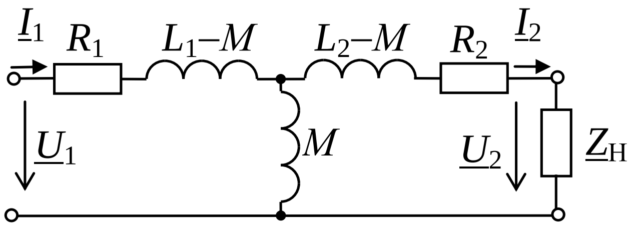
Схема с индуктивной связью   Эквивалентная схема без индуктивной связи





Уравнения и схема замещения линейного трансформатора





$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \\ 0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + \underline{Z}_{\text{Н}} \underline{I}_2 \end{cases}$$

6.2. Примеры и задачи

Задача 6.1

Для определения взаимной индуктивности двух катушек провели опыты с их последовательным соединением (рис. 6.1, 6.2) и получили, соответственно, показания приборов:

1) pV_1 = 120 В, pA_1 = 10 А, pW_1 = 600 Вт;

2) pV_2 = 120 В, pA_2 = 12 А, pW_2 = 864 Вт.

Определить взаимную индуктивность катушек. В какой схеме катушки соединены согласно?

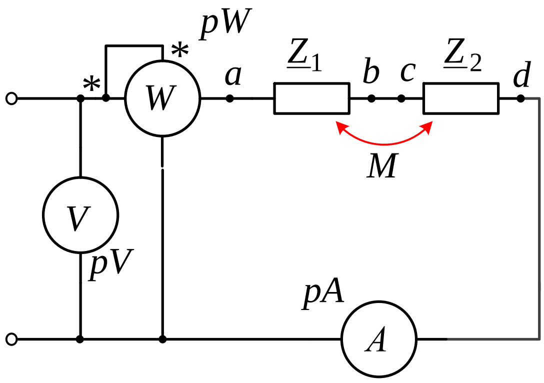


Рис. 6.1

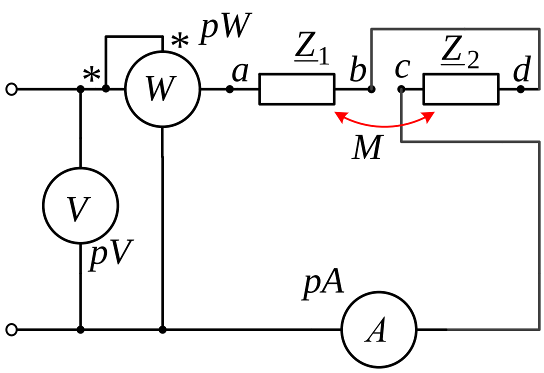


Рис. 6.2

Решение

По данным первого опыта найдем полное сопротивление цепи $Z_{Э1}$, ее активное $R_{Э1}$ и реактивное $X_{Э1}$ сопротивления:

$$Z_{Э1} = U_1 / I_1 = 120/10 = 12 \text{ Ом},$$
$$R_{Э1} = P_1 / I_1^2 = 600/10^2 = 6 \text{ Ом},$$
$$X_{Э1} = \sqrt{Z_{Э1}^2 - R_{Э1}^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}4 \text{ Ом}.$$

Аналогично из данных второго опыта:

$$Z_{Э2} = U_2 / I_2 = 120/12 = 10 \text{ Ом},$$
$$R_{Э2} = P_2 / I_2^2 = 864/12^2 = 6 \text{ Ом},$$
$$X_{Э2} = \sqrt{Z_{Э2}^2 - R_{Э2}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ Ом}.$$

Равенство активных сопротивлений $R_{Э1} = R_{Э2}$ свидетельствует об отсутствии ошибок измерения. Реактивное сопротивление в первом опыте оказалось больше, чем во втором ($X_{Э1} > X_{Э2}$). Вторая схема соответствует встречному включению, а первая – согласному.

Искомую взаимную индуктивность найдем из уравнений:

$$\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = X_{Э1},$$
$$\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M = X_{Э2},$$

откуда
$$M = \frac{X_{Э1} - X_{Э2}}{4\omega} = \frac{10{,}4 - 8}{4 \cdot 2\pi \cdot 50} = 1{,}91 \text{ мГн}.$$

Ответ: M = 1,91 мГн.

Задача 6.2

Определить ток I_1 в первичной обмотке и приложенное к ней напряжение (рис. 6.3), если во вторичной обмотке трансформатора без стального сердечника ток составляет I_2 = 0,5 А, R_1 = 60 Ом, R_2 = 30 Ом, $1/\omega C$ = 210 Ом, ωL_1 = 80 Ом, ωL_2 = 180 Ом, а коэффициент связи между первичной и вторичной обмотками k = 0,5.

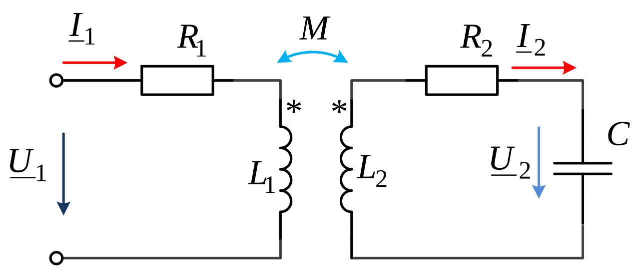


Рис. 6.3

Решение

Учитывая, что $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \dfrac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}}$,

найдем

$$\omega M = k\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = 0{,}5\sqrt{80 \cdot 180} = 60 \ \text{Ом}.$$

Применив развязку индуктивной связи (рис. 6.4), найдем ток $\underline{I}_2$ по формуле разброса

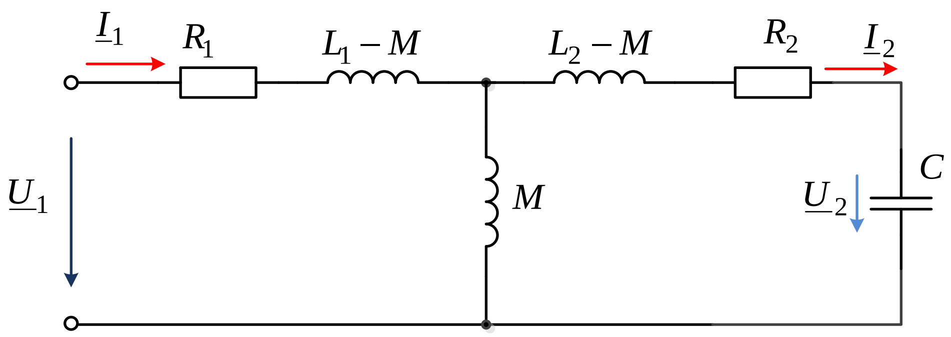


Рис. 6.4

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C}},$$

следовательно,

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \frac{R_2 + j\omega L_2 - j\dfrac{1}{\omega C}}{j\omega M} = 0{,}5 \cdot \frac{30 + j180 - j210}{j60} = -0{,}25 - j0{,}25 = 0{,}35e^{-j135°} \ \text{А}.$$

Приложенное напряжение определяется в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (R_1 + j\omega L_1 - j\omega M) + \underline{I}_2 (R_2 + j\omega L_2 - j\omega M - j1/\omega C) = (-0{,}25 -$
$- j0{,}25) \cdot (60 + j80 - j60) + 0{,}5 \cdot (30 + j180 - j60 - j210) = 5 - j\,65 =$
$= 65{,}19\, e^{-j85{,}6°}$ В.

Ответ: $I_1 = 0{,}35$А, $U_1 = 65{,}19$ В.

Задача 6.3

Определить показания вольтметров в линейной цепи (рис. 6.5), если дано:
$M_{12} = M_{32} = 2$ мГн, $C = 2$ мкФ,
$i = 0{,}1\sin 5000t$ А.

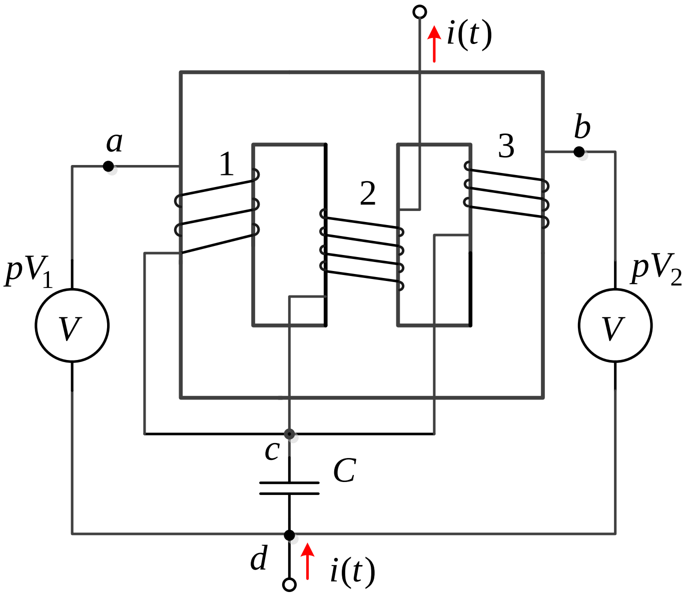


Рис. 6.5

Решение

Определим для каждой пары катушек одноименные зажимы.

Зажимы двух индуктивно связанных катушек называют одноименными, если при одинаковом направлении токов относительно этих зажимов потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке суммируются.

Маркировка одноименных зажимов позволяет проводить расчеты по схеме замещения (рис. 6.6).

Реактивные сопротивления элементов схемы равны:

$$\omega M_{12} = \omega M_{32} = 5000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом},$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

Показание первого вольтметра равно модулю напряжения между точками a и d:

$$U_1 = |\underline{U}_{ad}| = |\underline{U}_{da}|,$$

$$\underline{U}_{da} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I} + j\omega M_{12}\underline{I} = \underline{I}\left(j\omega M_{12} - j\frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= \frac{0{,}1}{\sqrt{2}}(j10 - j100) = -\frac{j9}{\sqrt{2}} = -j6{,}36 \text{ В}.$$

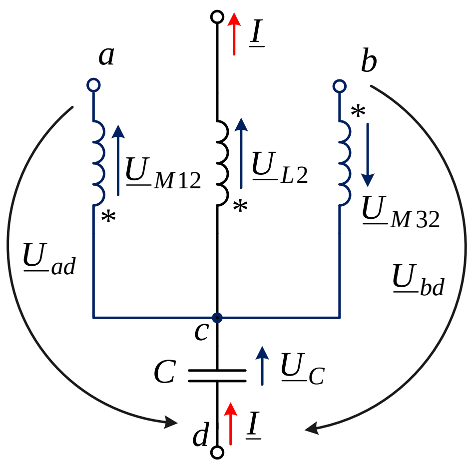


Рис. 6.6

Показание второго вольтметра определяет модуль напряжения между точками b и d:

$$U_2 = |\underline{U}_{bd}| = |\underline{U}_{db}|,$$

$$\underline{U}_{db} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I} - j\omega M_{32}\underline{I} = \underline{I}(-j\omega M_{32} - j\frac{1}{\omega C}) =$$

$$= \frac{0{,}1}{\sqrt{2}}(-j10 - j100) = -\frac{j11}{\sqrt{2}} = -j7{,}79 \text{ В}.$$

Ответ: pV_1 = 6,36 В; pV_2=7,79 В.

Задача 6.4

Рассчитать токи в цепи (рис. 6.7),
а) используя уравнения, составленные по законам Кирхгофа;
б) методом контурных токов, если
$R_1 = \omega L_2 = \omega L_3 = \omega L_5 = 2$ Ом,
$\omega M_{35} = 0{,}5$ Ом, $R_4 = 1$ Ом,
$\frac{1}{\omega C_5} = 5$ Ом, $E = 10$ В.

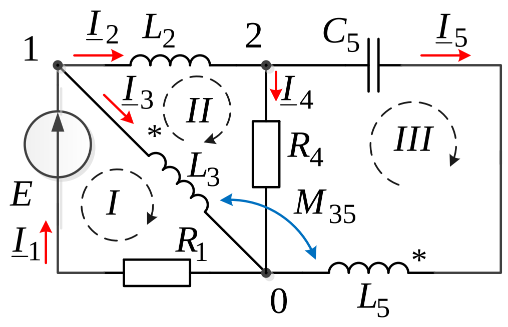


Рис. 6.7

Решение

а) Для рассматриваемой цепи можно составить два независимых уравнения по первому закону Кирхгофа и три – по второму закону Кирхгофа. Индуктивная связь катушек ωM_{35} учитывается в виде дополнительных слагаемых в напряжениях на индуктивностях L_3 и L_5, входящих в уравнения второго закона Кирхгофа.

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа используются следующие правила учета индуктивных связей. Напряжение на катушке L_k, имеющей индуктивную связь с катушкой L_p, складывается из напряжения самоиндукции $\underline{U}_k = j\omega L_k \underline{I}_k$ и напряжения взаимной индукции $\underline{U}_{pk} = j\omega M_{pk}\underline{I}_p$. Направление напряжения $\underline{U}_k$ совпадает с направлением тока $\underline{I}_k$. Направление $\underline{U}_{pk}$ определятся с учетом маркировки катушек и направлений токов в них по следующему правилу. Ток $\underline{I}_p$ в катушке L_p, имеющий направление от маркированного конца к немаркированному, создает в индуктивно связанной с ней катушке L_k напряжение взаимной индукции $\underline{U}_{pk}$, направленное также от маркированного зажима L_k к немаркированному.

С учетом сказанного записываем уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I}_2 - \underline{I}_5 - \underline{I}_4 = 0, \\ j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega M_{35} \underline{I}_5 + R_1 \underline{I}_1 = \underline{E}, \\ j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_4 \underline{I}_4 - j\omega L_3 \underline{I}_3 - j\omega M_{35} \underline{I}_5 = 0, \\ \dfrac{1}{j\omega C_5} \underline{I}_5 + j\omega L_5 \underline{I}_5 + j\omega M_{35} \underline{I}_3 - R_4 \underline{I}_4 = 0. \end{cases}$$

После подстановки численных значений получим

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0, \\ \underline{I}_2 - \underline{I}_5 - \underline{I}_4 = 0, \\ 2 \cdot \underline{I}_1 + j2 \cdot \underline{I}_3 + j0{,}5 \cdot \underline{I}_5 = 10, \\ j2 \cdot \underline{I}_2 - j2 \underline{I}_3 + 1 \cdot \underline{I}_4 - j0{,}5 \cdot \underline{I}_5 = 0, \\ j0{,}5 \cdot \underline{I}_3 - 1 \cdot \underline{I}_4 - j3 \cdot \underline{I}_5 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает значения токов в ветвях:

$$\underline{I}_1 = 3{,}76 - j1{,}75 \text{ А}, \quad \underline{I}_2 = 2{,}13 - j0{,}43 \text{ А}, \quad \underline{I}_3 = 1{,}63 - j1{,}32 \text{ А},$$

$$\underline{I}_4 = 1{,}61 - j0{,}75 \text{ А}, \quad \underline{I}_5 = 0{,}52 + j0{,}32 \text{ А}.$$

б) Рассчитаем цепь методом контурных токов.

Контурные уравнения в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13} \underline{I}_{33} = \underline{E}_{11}, \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{23} \underline{I}_{33} = \underline{E}_{22}, \\ \underline{Z}_{31} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{32} \underline{I}_{22} + \underline{Z}_{13} \underline{I}_{33} = \underline{E}_{33}. \end{cases}$$

Выбор независимых контуров указан стрелками на схеме (рис. 6.8).

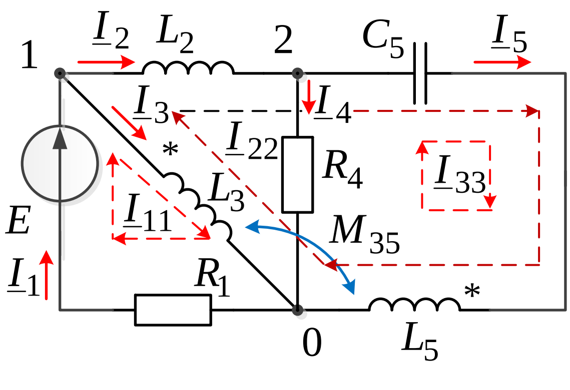


Рис. 6.8

При записи собственных и общих сопротивлений запишем сначала по уже известным правилам члены, не связанные с взаимной индуктивностью. Далее учтем члены, отражающие индуктивные связи.

В собственных сопротивлениях контуров слагаемые $2j\omega M_{ik}$ появляются, если обе индуктивно связанные катушки L_i *и* L_k входят в данный контур и их маркировка соответствует согласному включению в этом контуре. Если при обходе контура, включающего две индуктивно связанные катушки, одна из катушек обтекается контурным током в положительном, а другая – в отрицательном направлении, то член в соответствующем собственном сопротивлении будет иметь знак «минус», т. е. $-2j\omega M_{ik}$.

При записи общего сопротивления двух контуров учитывается их взаимное индуктивное влияние друг на друга. Здесь член $j\omega M_{pq}$ имеет знак «плюс», если положительные направления обоих контурных токов ориентированы одинаково относительно маркированных зажимов связанных катушек L_p и L_q, и оба эти тока протекают по ним либо в положительном, либо в отрицательном направлении. Если же один из влияющих друг на друга токов протекает в положительном, а другой – в отрицательном направлении, то в общем сопротивлении контуров записывают член $-j\omega M_{pq}$.

С учетом сформулированных правил получим для контурных сопротивлений цепи следующие выражения:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_3 = 2 + j2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{22} = j\omega L_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_5} + j\omega L_5 - j2\omega M_{35} = j2 + j2 - j5 + j2 - j2\cdot 0{,}5 = 0,$$

$$\underline{Z}_{33} = j\omega L_5 + \frac{1}{j\omega C_5} + R_4 = j2 - j5 + 1 = 1 - j3 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -j\omega L_3 + j\omega M_{35} = -j2 + j0{,}5 = -j1{,}5 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = j\omega M_{35} = j0{,}5 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{23} = j\omega L_5 + \frac{1}{j\omega C_5} - j\omega M_{35} = j2 - j5 - j0{,}5 = -j3{,}5 \text{ Ом}.$$

Контурные ЭДС равны:

$$\underline{E}_{11} = \underline{E} = 10 \text{ В}, \qquad \underline{E}_{22} = 0, \qquad \underline{E}_{33} = 0.$$

После подстановки числовых значений система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(2+j2)\underline{I}_{11}-j1{,}5\underline{I}_{22}+j0{,}5\underline{I}_{33}=10,\\ -j1{,}5\underline{I}_{11}+0\underline{I}_{22}-j3{,}5\underline{I}_{33}=0,\\ j0{,}5\underline{I}_{11}-j3{,}5\underline{I}_{22}+(1-j3)\underline{I}_{33}=0.\end{cases}$$

Решив систему, получим значения контурных токов:

$\underline{I}_{11}=3{,}76-j1{,}75$ А, $\underline{I}_{22}=2{,}13-j0{,}43$ А, $\underline{I}_{33}=-1{,}61+j0{,}75$ А.

Токи в ветвях выразим через контурные токи:

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{11}=3{,}76-j1{,}75=4{,}15e^{-j25^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_2=\underline{I}_{22}=2{,}13-j0{,}43=2{,}17e^{-j11^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_3=\underline{I}_{11}-\underline{I}_{22}=1{,}63-j1{,}32=2{,}10e^{-j39^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_4=-\underline{I}_{33}=1{,}61-j0.75=1{,}78e^{-j25^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_5=\underline{I}_{22}+\underline{I}_{33}=0{,}52+j0{,}32=0{,}61e^{j32^\circ}\ \text{А}.$$

Ответ: $\underline{I}_1=4{,}15e^{-j25^\circ}$ А, $\underline{I}_2=2{,}17e^{-j11^\circ}$ А, $\underline{I}_3=2{,}10e^{-j39^\circ}$ А, $\underline{I}_4=1{,}78e^{-j25^\circ}$ А, $\underline{I}_5=0{,}61e^{j32^\circ}$ А.

Задача 6.5

Чему равно входное сопротивление цепи (рис. 6.9), если $\omega L = R = 20$ Ом, $1/\omega C = 10$ Ом, $k = 0{,}5$?

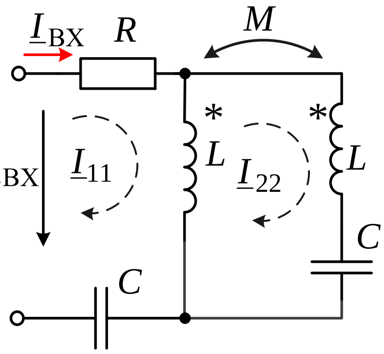


Рис. 6.9

Решение

Зная коэффициент связи k, найдем сопротивление взаимной индукции

$$\omega M = k\sqrt{\omega L\cdot\omega L}=0{,}5\sqrt{20\cdot 20}=10\ \text{Ом}.$$

Входное сопротивление цепи определяется отношением входного напряжения к входному току:

$$\underline{Z}_{\text{ВХ}}=\frac{\underline{U}_{\text{ВХ}}}{\underline{I}_{\text{ВХ}}}.$$

Выразим входной ток через входное напряжение, используя метод контурных токов, причем первый контурный ток выберем равным входному току:

$$\underline{I}_{11} = \underline{I}_{\text{ВХ}} .$$

$$\begin{cases} \quad \underline{I}_{11}(R + j\omega L - j(1/\omega C)) - \underline{I}_{22}(j\omega L - j\omega M) = \underline{U}_{\text{ВХ}}, \\ - \quad \underline{I}_{11}(j\omega L - j\omega M) + \underline{I}_{22}(2j\omega L - j(1/\omega C) - 2j\omega M) = 0. \end{cases}$$

Подставим численные значения:

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}(20 + j10) - \underline{I}_{22}\, j10 = \underline{U}_{\text{ВХ}}, \\ -\underline{I}_{11}\, j10 + \underline{I}_{22}\, j10 = 0, \end{cases}$$

откуда $\underline{I}_{\text{ВХ}} = \underline{I}_{11} = \dfrac{\underline{U}_{\text{ВХ}}}{20}$.

Таким образом, $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = \dfrac{\underline{U}_{\text{ВХ}}}{\underline{I}_{\text{ВХ}}} = 20$ Ом.

Тот же ответ можно получить, применяя развязку индуктивной связи (рис. 6.10).

Ответ: $\underline{Z}_{\text{ВХ}} = 20$ Ом.

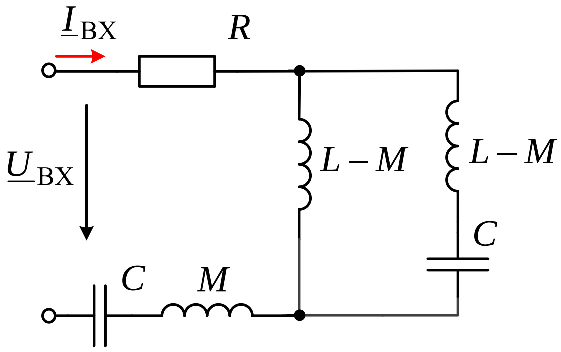


Рис. 6.10

Задача 6.6

Рассчитать токи, построить векторную диаграмму и составить баланс активной мощности воздушного трансформатора (рис. 6.11) при напряжении $U_1 = 100$ В.

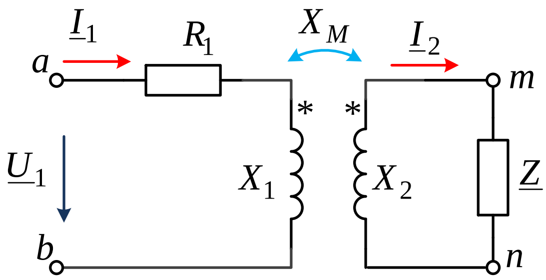


Рис. 6.11

Определить сопротивление нагрузки трансформатора с параметрами $R_1 = 2{,}3$ Ом, $X_1 = 8$ Ом, $X_2 = 10$ Ом, $X_M = 8$ Ом, исходя из условия выделения в нем максимальной активной мощности.

При решении задачи рекомендуется применить развязку индуктивной связи.

Решение

Выделим ветвь *mn* с сопротивлением $\underline{Z}$, а остальную часть схемы будем рассматривать как активный двухполюсник. Если обозначить входное сопротивление двухполюсника со стороны выходных зажимов *mn* через $\underline{Z}_{2\text{ВХ}}$, то передача максимальной активной мощности от двухполюсника к нагрузке происходит при условии

$$\underline{Z} = \overset{*}{\underline{Z}}_{2\text{ВХ}},$$

где $\underline{Z}_{2\text{ВХ}}$ и $\overset{*}{\underline{Z}}_{2\text{ВХ}}$ – комплексно сопряженные величины.

После развязки магнитной связи схема принимает вид, показанный на рис. 6.12.

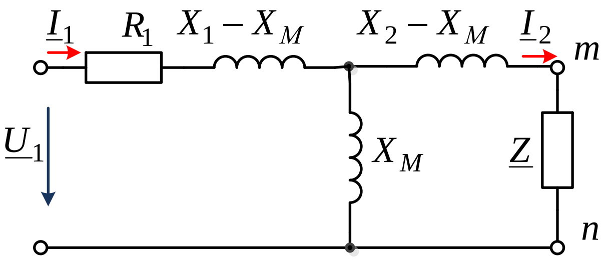


Рис. 6.12

Сопротивление двухполюсника относительно зажимов *mn*

$$\underline{Z}_{mn} = \underline{Z}_{2\text{вв}} = j(X_2 - X_M) + \frac{jX_M \cdot (R_1 + jX_1 - jX_M)}{R_1 + jX_1} =$$

$$= jX_2 + \frac{X_M^2}{R_1 + jX_1} = j10 + \frac{8^2}{2{,}3 + j8} = 2{,}12 + j2{,}6 \text{ Ом.}$$

Тогда

$$\underline{Z} = \overset{*}{\underline{Z}}_{2\text{вх}} = R_\text{н} + jX_\text{н} = 2{,}12 - j2{,}6 \text{ Ом.}$$

Найдем токи $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ в обмотках трансформатора из уравнений, составленных для схемы, изображенной на рис. 6.11:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 - jX_M\underline{I}_2, \\ 0 = (\underline{Z} + jX_2)\underline{I}_2 - jX_M\underline{I}_1. \end{cases}$$

Подставим численные значения

$$\begin{cases} 100 = \underline{I}_1(2{,}3 + j8) - \underline{I}_2 j8, \\ 0 = \underline{I}_1 j8 - \underline{I}_2(2{,}12 - j2{,}6 + j10) \end{cases}$$

и получим

$$\underline{I}_1 = 21{,}79e^{j0^\circ} \text{ А}, \qquad \underline{I}_2 = 22{,}64e^{j16^\circ} \text{ А}.$$

Составим баланс мощностей.

Мощность, получаемая из сети:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 = 100 \cdot 21{,}79 = 2179 \text{ Вт}.$$

Мощность, потребляемая в первичной цепи:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 21{,}79^2 \cdot 2{,}3 = 1092 \text{ Вт}.$$

Мощность, потребляемая во вторичной цепи:

$$P_2 = I_2^2 R_2 = 22{,}64^2 \cdot 2{,}12 = 1087 \text{ Вт}.$$

Таким образом,

$$P = P_1 + P_2 = 2179 = 1092 + 1087 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей соблюдается.

Мощность, потребляемая во вторичной цепи, передается из первичной цепи вследствие явления взаимной индукции и также может быть определена следующим образом

$$P_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{M21}\overset{*}{\underline{I}_2}\right] = \mathrm{Re}\left[jX_M\,\underline{I}_1\overset{*}{\underline{I}_2}\right] = X_M I_1 I_2 \cos\left(90° + \psi_{i1} - \psi_{i2}\right) =$$

$$= 8 \cdot 21{,}79 \cdot 22{,}64 \cdot \cos\left(90° + 0° - 16°\right) = 1087 \text{ Вт}.$$

Векторная диаграмма, построенная по уравнениям трансформатора, показана на рис. 6.13.

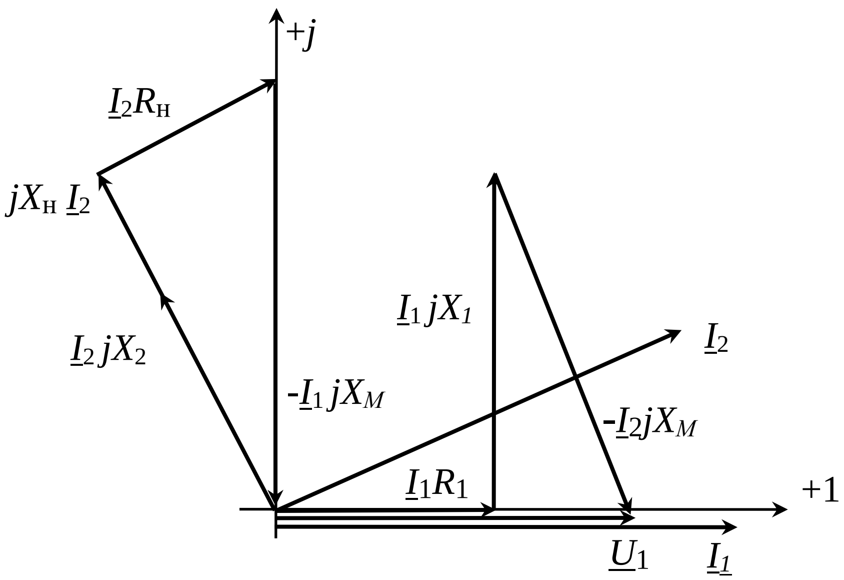


Рис. 6.13

Ответ: $\underline{I}_1 = 21{,}79e^{j0°}$ А, $\underline{I}_2 = 22{,}64e^{j16°}$ А, $P = 2179$ Вт.

Задача 6.7

Определить показания вольтметров (рис. 6.14), если дано:

$e = 120\sqrt{2}\,\sin 4000t$ В,
$L_1 = L_3 = 20$ мГн,
$L_2 = L_4 = 25$ мГн,
$M_{12} = M_{34} = 10$ мГн,
$C = 2{,}5$ мкФ.

Ответ: 140 В, 120 В, 40 В.

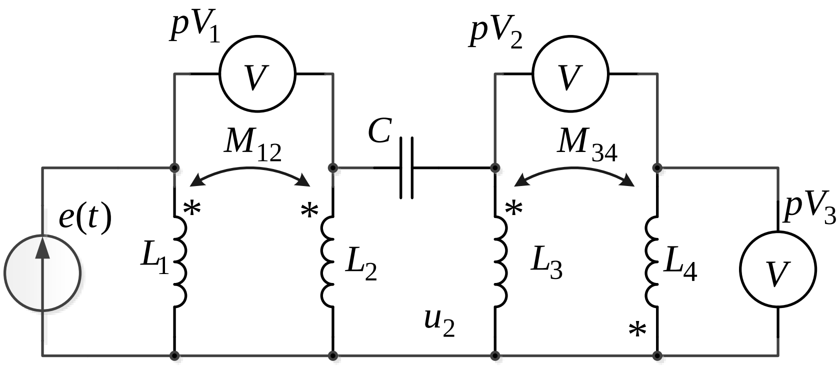


Рис. 6.14

Задача 6.8

Найти показание ваттметра (рис. 6.15), если $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $X_3 = X_4 = X_M = 10$ Ом, $X_1 = X_2 = 20$ Ом, $\underline{J} = 10$ А.

Ответ: 1 кВт.

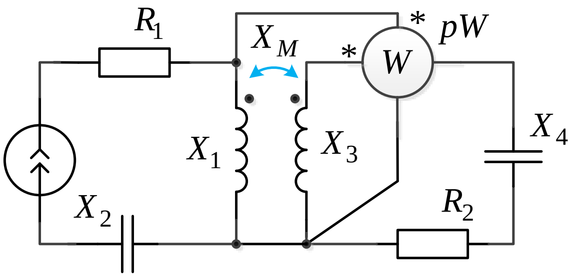


Рис. 6.15

Задача 6.9

Рассчитать токи в ветвях и напряжения $\underline{U}_{ac}$, $\underline{U}_{bc}$ (рис. 6.16), если $J = 20$ А, $R_1 = 4{,}9$ Ом, $X_C = 15{,}1$ Ом, $R_2 = 5{,}1$ Ом, $X_{L1} = 6$ Ом, $X_{L2} = 10$ Ом, $X_M = 3$ Ом.

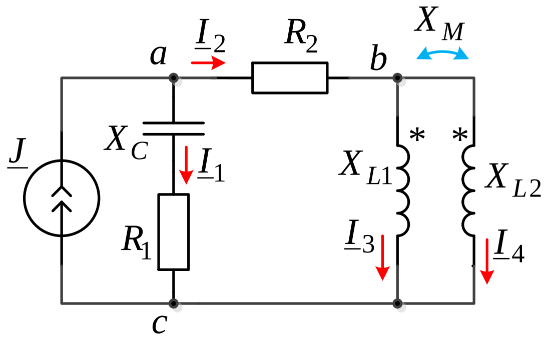


Рис. 6.16

Ответ: $\underline{I}_1 = j10{,}2$ А, $\underline{I}_2 = 20{,}0 - j10{,}2$ А, $\underline{I}_3 = 14{,}0 - j7{,}14$ А, $\underline{I}_4 = 6{,}0 - j3{,}06$ А, $\underline{U}_{ac} = 154 + j50$ В, $\underline{U}_{bc} = 52 + j102$ В.

Задача 6.10

Какой величины следует выбрать коэффициент связи двух магнитно связанных катушек, для того чтобы в заданной цепи (рис. 6.17) установился резонанс токов, если $L_1 = 16$ мГн, $L_2 = 9{,}55$ мГн, $f = 1000$ Гц, $C = 2$ мкФ?

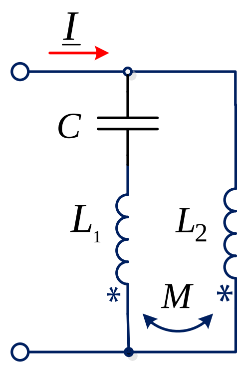


Рис. 6.17

Ответ: $k = 0{,}52$.

Задача 6.11

Определить входное сопротивление цепи (рис. 6.18) при $X_1 = X_2 = 9$ Ом, $X_M = 3$ Ом.

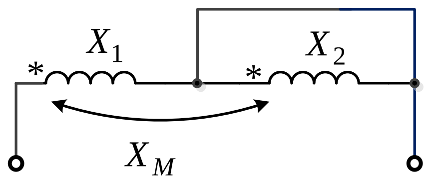


Рис. 6.18

Ответ: $\underline{Z}_{ВХ} = j8$ Ом.

Задача 6.12

Определить показания вольтметра и ваттметра (рис. 6.19):

а) при разомкнутом ключе;

б) при замкнутом ключе.

Дано: $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $k = 0{,}8$, $X_1 = X_2 = 10$ Ом, $\underline{E} = 141$ В.

Ответ: а) $pV = 80$ В, $pW = 0$;

б) $pV = 27$ В, $pW = 132$ Вт.

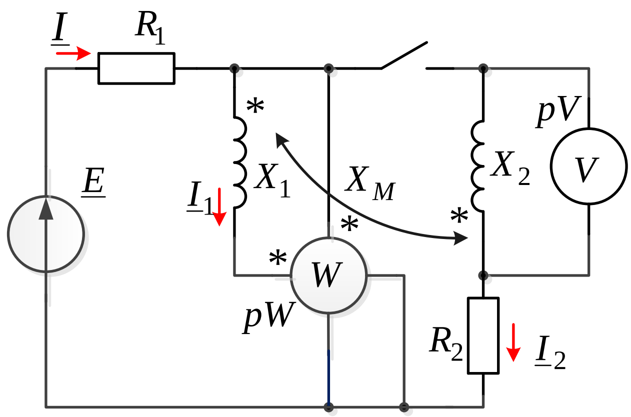


Рис. 6.19

Задача 6.13

В цепи (рис. 6.20) при частоте $\omega = 10^3$ рад/с наблюдается резонанс токов, $M = L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 40$ мГн, $R = 100$ Ом, $U = 100$ В. Определить показания амперметров.

Ответ: $pA_1 = 5$ А, $pA_2 = 5$ А, $pA_3 = 1$ А.

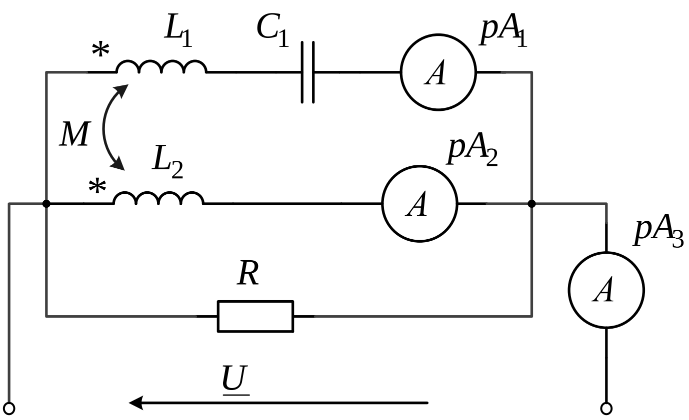


Рис. 6.20

Задача 6.14

В цепи (рис. 6.21) определить входное напряжение $\underline{U}_1$, если $X_1 = 50$ Ом, $X_M = 10$ Ом, токи в первичной и вторичной цепи равны $\underline{I}_1 = 0{,}8$ А, $\underline{I}_2 = 0{,}5$ А.

Ответ: $j35$ В.

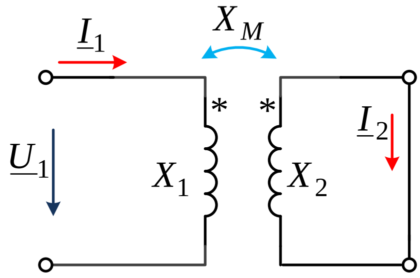


Рис. 6.21

Задача 6.15

Определить комплексное входное сопротивление цепи (рис. 6.22), если $X_1 = 40$ Ом, $X_2 = 90$ Ом, $X_C = 20$ Ом, $X_M = 20$ Ом, $R = 40$ Ом.

Ответ: $(40 + j20)$ Ом.

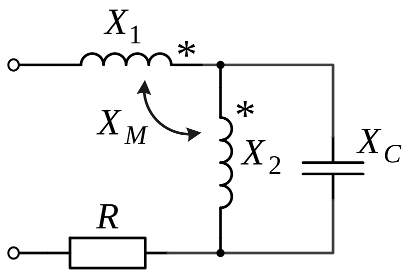


Рис. 6.22

Задача 6.16

Какое сопротивление $\underline{Z}$ следует включить в схему цепи (рис. 6.23), чтобы напряжение на катушке L_1 было равно нулю?

Ответ: $\underline{Z} = -j\omega\left(\dfrac{L_1 L_2}{M} - M\right)$.

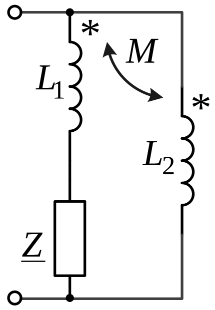


Рис. 6.23

Задача 6.17

Рассчитать токи в цепи (рис. 6.24), а) используя уравнения, составленные по законам Кирхгофа; б) методом контурных токов, если $E = 10$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $\omega L_2 = 5$ Ом, $\omega L_3 = 4$ Ом,

$$\omega M_{23} = 1 \text{ Ом}, \ \frac{1}{\omega C_5} = 2 \text{ Ом}.$$

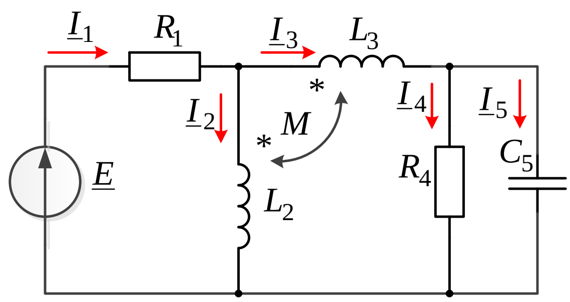


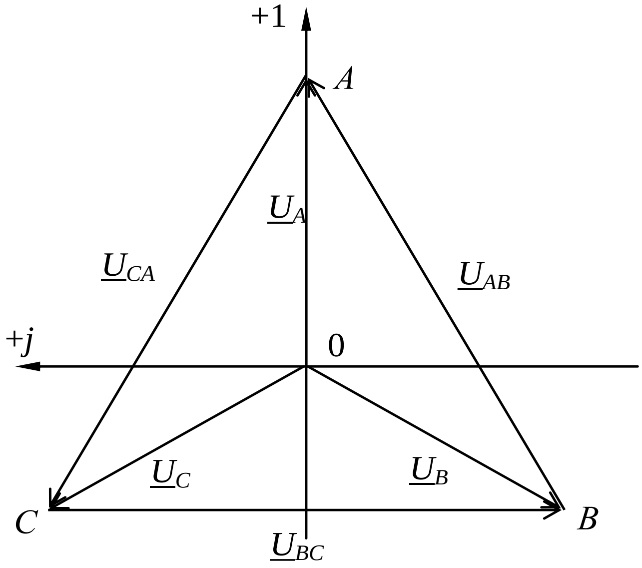
Рис. 6.24

Ответ: $\underline{I}_1 = 2{,}078 - j2{,}055$ А, $\underline{I}_2 = 0{,}508 - j0{,}947$ А, $\underline{I}_3 = 1{,}570 - j1{,}109$ А, $\underline{I}_4 = 0{,}231 - j1{,}339$ А, $\underline{I}_5 = 1{,}339 + j0{,}231$ А.

7. СИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

7.1. Краткие теоретические сведения

Симметричная трехфазная система ЭДС



$$\underline{U}_A = U = U_Ф,$$

$$a = e^{j120^\circ},$$

$$\underline{U}_B = a^2\,\underline{U}_B = U\,e^{-j120^\circ} = U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\underline{U}_C = a\,\underline{U}_C = U\,e^{j120^\circ} = U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

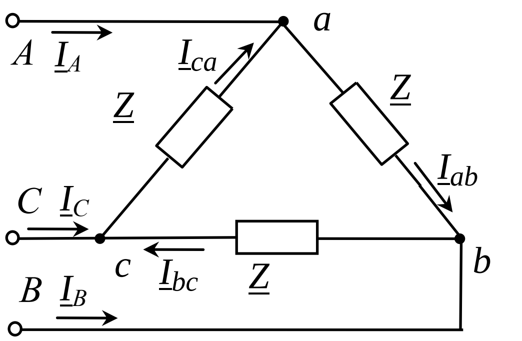
$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_Л\,e^{j30^\circ},$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = U_Л\,e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = U_Л\,e^{j150^\circ},$$

$$U_Л = \sqrt{3}\,U_Ф.$$

Соединение нагрузки треугольником



$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}},\ \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}},\ \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}}.$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca},\quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab},$$

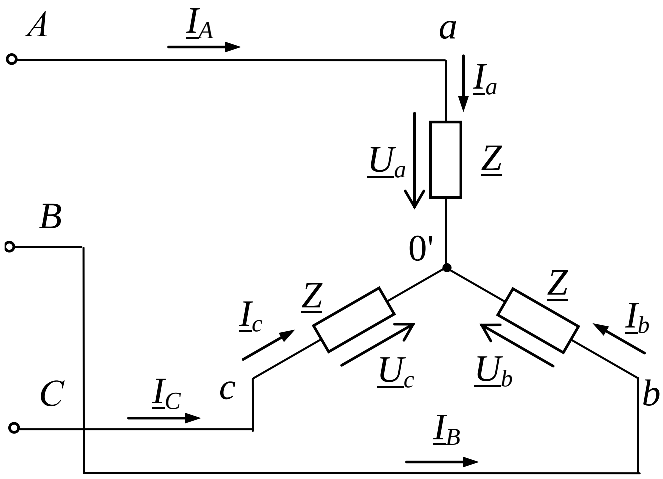
$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}.$$

$$I_A = I_B = I_C = I_Л,$$

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_Ф,$$

$$I_Л = \sqrt{3}\ I_Ф,\ U_Л = U_Ф.$$

Соединение нагрузки звездой



$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0,$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \underline{U}_a / \underline{Z},\quad \underline{I}_B = \underline{I}_b = \underline{U}_b / \underline{Z},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \underline{U}_c / \underline{Z}.$$

$$I_A = I_B = I_C = I_Л,$$

$$I_a = I_b = I_c = I_Ф.$$

$$I_Л = I_Ф,\ \ U_a = U_b = U_c = U_Ф,$$

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_Л,$$

$$U_Л = \sqrt{3}\,U_Ф.$$

Мощность симметричной трехфазной цепи:

$$P = P_A + P_B + P_C = 3P_Ф = \sqrt{3}\ U_Л I_Л \cos\varphi,$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = 3\ Q_Ф = \sqrt{3}\ U_Л I_Л \sin\varphi,$$

$$S = S_A + S_B + S_C = 3\ S_Ф = \sqrt{3}\ U_Л I_Л.$$

7.2. Примеры и задачи

Задача 7.1

Определить напряжения между выводами обмоток трехфазного источника $\underline{U}_{XB}$, $\underline{U}_{BC}$ и $\underline{U}_{CX}$ при неправильном включении фазы A (рис. 7.1). Фазное напряжение $U_Ф = 220$ В.

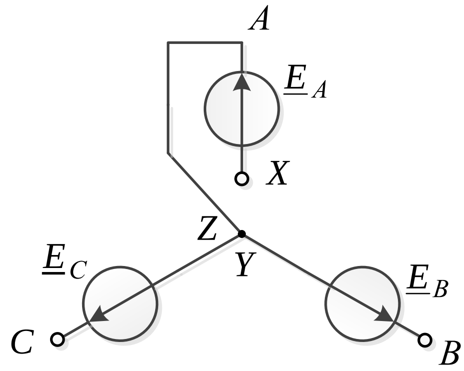


Рис. 7.1

Решение

Построим на комплексной плоскости топографическую диаграмму, приняв $\underline{\varphi}_X = 0$ и учитывая сдвиг 120° между напряжениями различных фаз генератора.

$\underline{U}_{AX} = \underline{U}_Ф$,

$$\underline{U}_{BY} = \underline{U}_Ф e^{-j120^\circ},$$

$$\underline{U}_{CZ} = \underline{U}_Ф e^{j120^\circ}.$$

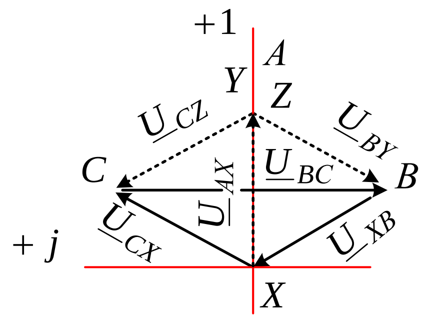


Рис. 7.2

Поместим в начало координат точку X (рис. 7.2).

Тогда $\underline{\varphi}_A = \underline{\varphi}_X + \underline{U}_{AX} = 220$ В, причем в соответствии со схемой соединения обмоток $\underline{\varphi}_Y = \underline{\varphi}_Z = \underline{\varphi}_A$.

Определим потенциал точки B:

$$\underline{\varphi}_B = \underline{\varphi}_Y + \underline{U}_{BY} = 220 + 220e^{-j120^\circ} =$$

$$= 220 + 220(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 110 - j190{,}5\ \text{В},$$

потенциал точки C:

$$\underline{\varphi}_C = \underline{\varphi}_Z + \underline{U}_{CZ} = 220 + 220(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 110 + j190{,}5\ \text{В}.$$

Следовательно, напряжения между выводами обмоток:

$$\underline{U}_{XB} = \underline{\varphi}_X - \underline{\varphi}_B = -110 + j190{,}5 = 220e^{j120^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{\varphi}_B - \underline{\varphi}_C = 110 - j190{,}5 - 110 - j190{,}5 = -j381 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{CX} = \underline{\varphi}_C - \underline{\varphi}_X = 110 + j190{,}5 = 220e^{j60^\circ} \text{ В.}$$

Таким образом, при «неправильном» соединении обмоток на выходе источника получается несимметричная система напряжений

Ответ: $\underline{U}_{XB} = 220e^{j120^\circ}$ В; $\underline{U}_{BC} = -j381$ В; $\underline{U}_{CX} = 220^{\,j60^\circ}$ В.

Задача 7.2

Определить показания приборов и ток i_B, если цепь подключена к трехфазной нагрузке (рис. 7.3). При этом $\underline{U}_{AB} = 380\ e^{j30^\circ}$ В, $R = 76$ Ом, $X_L = 44$ Ом.

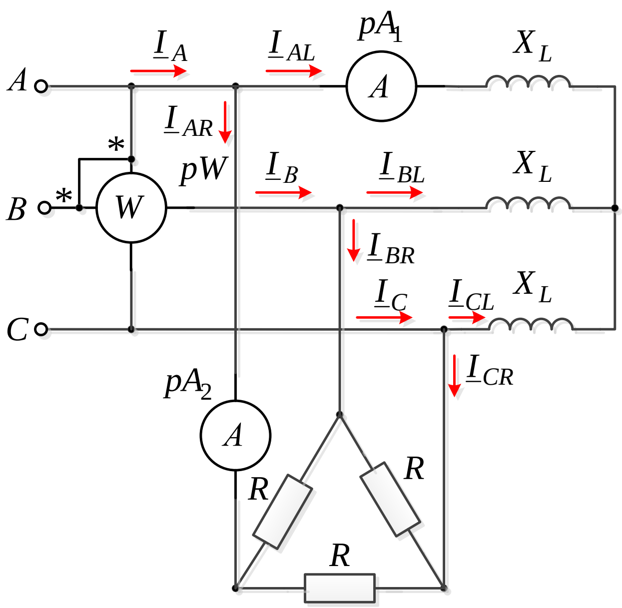


Рис. 7.3

Решение

На топографической диаграмме (рис. 7.4) показано положение точек *A*, *B*, *C* при заданном $\underline{U}_{AB}$. Токи в фазах индуктивной нагрузки отстают от соответствующего напряжения на 90°.

Причем действующие значения фазных токов соединения «звезда» равны

$$I_{AL} = I_{BL} = I_{CL} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{3}X_L} = \frac{380}{\sqrt{3}\cdot 44} = 5 \text{ А,}$$

$pA_1 = I_{AL} = 5$ А.

Ток

$$i_{BL} = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 210^\circ) \text{, А.}$$

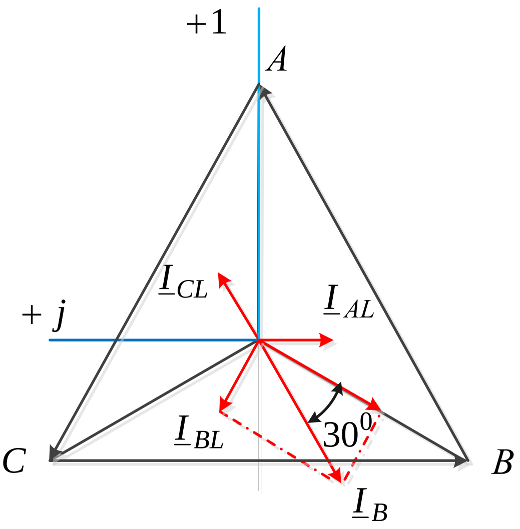


Рис. 7.4

Треугольник сопротивлений преобразуем в эквивалентную звезду, тогда $R_{\curlywedge} = R / 3$.

Токи в фазах эквивалентной активной нагрузки совпадают с соответствующими фазными напряжениями, причем

$$I_{AR} = I_{BR} = I_{CR} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{3}R} = \frac{380 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 76} = 5\sqrt{3}\ \text{А}, \qquad pA_2 = I_{AR} = 5\sqrt{3} = 8{,}66\ \text{А}.$$

Следовательно,

$$i_{BR} = 5\sqrt{6}\ \sin(\omega t - 120°) = 12{,}25 \sin(\omega t - 120°)\ \text{А}.$$

Ток $\underline{I}_B$ найдем из векторной диаграммы:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BL} + \underline{I}_{BR} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}\, e^{-j150^\circ} = 10 e^{-j150^\circ}\ \text{А},$$

$$i_B = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 150°) = 14{,}14 \sin(\omega t - 150°),\ \text{А}.$$

Показания ваттметра:

$$pW = \text{Re}\left[\underline{U}_{AC} \overset{*}{\underline{I}}_B\right] = \text{Re}\left[380 e^{-j30^\circ} \cdot 10 e^{j150^\circ}\right] = -1900\ \ \text{Вт}.$$

Ответ: $pW = -1900$ Вт; $pA_1 = 5{,}0$ А; $pA_2 = 8{,}66$ А, $i_B = 14{,}14 \sin(\omega t - 150°)$ А.

Задача 7.3

Определить линейные и фазные токи, показания ваттметров для заданной цепи при $U_Л$ = 220 В, $\underline{Z}$ = 10 + j10 Ом (рис. 7.5). Определить эти же величины при обрыве линейного провода в точке d.

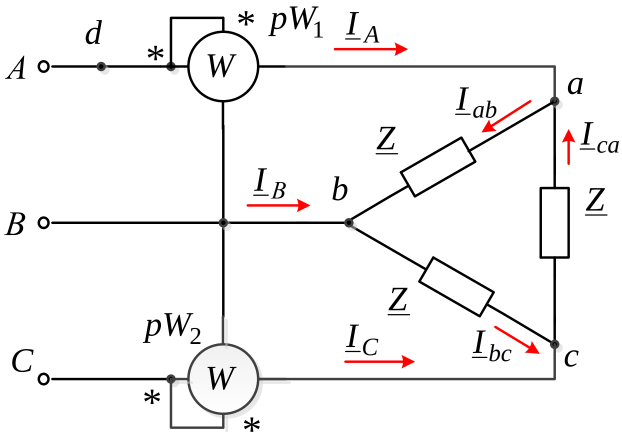


Рис. 7.5

Решение

а) Примем $\underline{U}_{AB} = U_{AB}$ = 220 В.

Тогда комплексы линейных напряжений:

$$\underline{U}_{BC} = 220\ e^{-j120^\circ}\ \text{В},\ \ \underline{U}_{CA} = 220\ e^{j120^\circ}\ \text{В}.$$

Определим комплексы фазных и линейных токов:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{AB} / \underline{Z} = 220/(10 + j10) = 15{,}556 e^{-j45^\circ} = 11 - j11 \text{ А};$$
$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{BC} / \underline{Z} = 220 e^{-j120^\circ} / (10 + j10) = 15{,}556 e^{-j165^\circ} = -15 - j4{,}03 \text{ А};$$
$$\underline{I}_{ca} = \underline{U}_{CA} / \underline{Z} = 220 e^{j120^\circ} / (10 + j10) = 15{,}556 e^{j75^\circ} = 4{,}03 + j15 \text{ А};$$
$$\underline{I}_{A} = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 11 - j11 - 4{,}03 - j15 = 6{,}97 - j26 = 26{,}918 e^{-j75^\circ} \text{ А};$$
$$\underline{I}_{B} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -15 - j4{,}03 - 11 + j11 = -26 + j6{,}97 = 26{,}918 e^{j165^\circ} \text{ А};$$
$$\underline{I}_{C} = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 4{,}03 + j15 + 15 + j4{,}03 = 19{,}03 + j19{,}03 = 26{,}918 e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Найдем показания ваттметров:

$$P_1 = \mathrm{Re}[\underline{U}_{AB} \overset{*}{\underline{I}}_{A}] = \mathrm{Re}[220 \cdot 26{,}9 e^{j75^\circ}] = 1532 \text{ Вт},$$

$$P_2 = \mathrm{Re}[\underline{U}_{CB} \overset{*}{\underline{I}}_{C}] = \mathrm{Re}[220 e^{j60^\circ} \cdot 26{,}9 e^{-j45^\circ}] = 5716 \text{ Вт}.$$

Активная мощность трехфазной цепи

$$P = P_1 + P_2 = 1532 + 5716 = 7248 \text{Вт}.$$

Проверка показывает, что

$$P = 3 I_{\Phi}^2 \cdot R = 3 \cdot 15{,}56^2 \cdot 10 = 7260 \text{ Вт}.$$

б) Определим токи в фазах нагрузки при обрыве в точке d:

$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{BC} / \underline{Z} = 220 e^{-j120^\circ} / (10 + j10) = 15{,}556 e^{-j165^\circ} = -15 - j4{,}03 \text{ А},$$
$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = \underline{U}_{CB} / 2\underline{Z} = 220 e^{j60^\circ} / (20 + j20) = 7{,}78 e^{j15^\circ} = 7{,}5 + j2{,}0 \text{ А}.$$

Линейные токи в соответствии с первым законом Кирхгофа находим из уравнений:

$$\underline{I}_A = 0,$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_B = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 7{,}5 + j2 + 15 + j4{,}03 = 22{,}5 + j6{,}03 = 23{,}3 e^{j15^\circ} \text{ А}.$$

Показания ваттметров определяем с помощью найденных комплексов напряжений и токов, соответствующих схеме включения приборов:

$$P_1 = \mathrm{Re}[\underline{U}_{AB} \overset{*}{\underline{I}}_{A}] = \mathrm{Re}[220 \cdot 0] = 0;$$

$$P_2 = \mathrm{Re}[\underline{U}_{CB} \overset{*}{\underline{I}}_{C}] = \mathrm{Re}[220 e^{j60^\circ} \cdot 23{,}3 e^{-j15^\circ}] = 3625 \text{ Вт}.$$

Ответ: а) $\underline{I}_A = 26{,}9 e^{-j75^\circ}$ А; $\underline{I}_B = 26{,}9 e^{j165^\circ}$ А; $\underline{I}_C = 26{,}9 e^{j45^\circ}$ А;

$\underline{I}_{ab} = 15{,}6e^{-j45^\circ}$ А; $\underline{I}_{bc} = 15{,}6e^{-j165^\circ}$ А; $\underline{I}_{ca} = 15{,}6e^{j75^\circ}$ А;

$pW_1 = 1532$ Вт; $pW_2 = 5716$ Вт.

б) $\underline{I}_A = 0$; $\underline{I}_B = 23{,}3e^{-j165^\circ}$ А; $\underline{I}_C = 23{,}3e^{j15^\circ}$ А; $\underline{I}_{ab} = 7{,}78e^{j15^\circ}$ А; $\underline{I}_{bc} = 15{,}6e^{-j165^\circ}$ А; $\underline{I}_{ca} = 7{,}78e^{j15^\circ}$ А; $pW_1 = 0$; $pW_2 = 3625$ Вт.

Задача 7.4

К зажимам сети трехфазного тока с симметричными линейными напряжениями присоединена статическая нагрузка с индуктивно связанными фазами. Найти фазные и линейные токи цепи при $U_Л = 220$ В, $R_Л = 3$ Ом, $X_Л = 4$ Ом, $R = 6$ Ом, $X_L = 12$ Ом, $X_M = 5$ Ом. Проверьте полученные результаты по балансу мощностей, используя метод двух ваттметров.

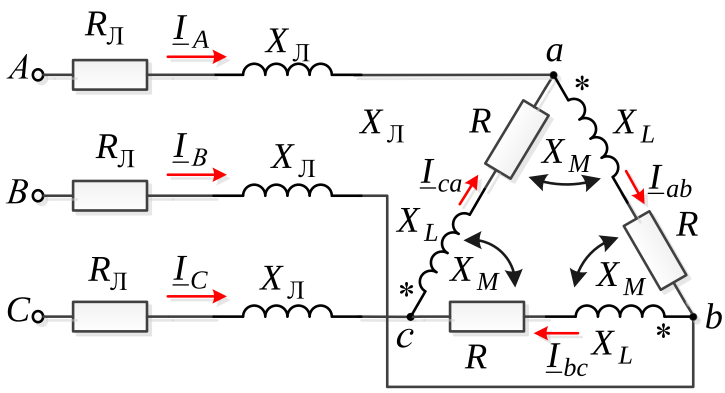


Рис. 7.6

Решение

Поскольку $U_Л$ = 220 В, то $U_Ф$ = 127 В. Примем $\underline{U}_A = 127$ В, $\underline{U}_B = 127e^{-j120^0}$ В, $\underline{U}_C = 127e^{j120^0}$ В.

Преобразуем схему с индуктивными связями (рис. 7.6) в схему без них (рис. 7.7). Далее выполним преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду (рис. 7.8).

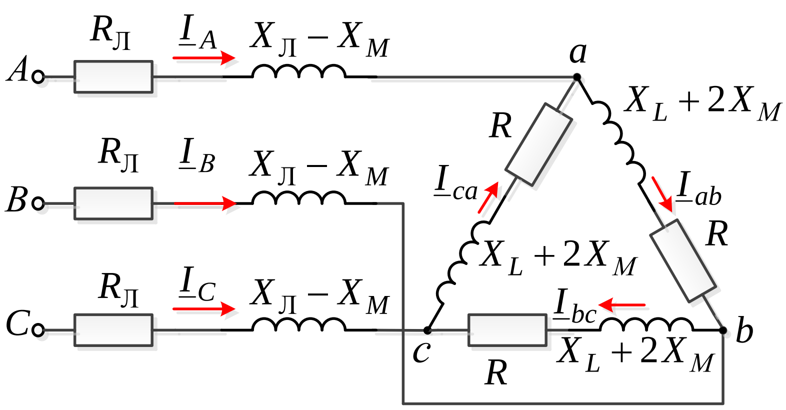


Рис. 7 7

При этом обозначим $X_\Delta = X_L + 2X_M = 12 + 2 \cdot 5 = 22$ Ом.

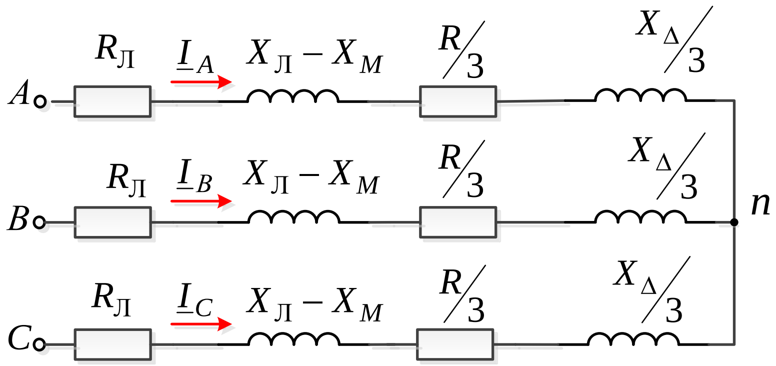


Рис. 7.8

Линейные токи в полученной схеме:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{R_Л + \frac{R}{3} + j\left(X_Л - X_М + \frac{X_Δ}{3}\right)} = \frac{127}{3 + \frac{6}{3} + j\left(4 - 5 + \frac{22}{3}\right)} = 15{,}74e^{-j51{,}71^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = 15{,}74e^{-j171{,}71^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot e^{j120^\circ} = 15{,}74e^{j68{,}29^\circ} \text{ А}.$$

Фазные токи треугольной нагрузки (рис. 7.7):

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} = 9{,}09e^{-j21{,}71^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j90^\circ} = 9{,}09e^{-j141{,}71^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} \cdot e^{j150^\circ} = 9{,}09e^{j98{,}29^\circ} \text{ А}.$$

Показания ваттметров определяем по формулам:

$$P_{AB} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{AB}\overset{*}{\underline{I}}_A) = \mathrm{Re}(220e^{j30^\circ} \cdot 15{,}74e^{j51{,}71^\circ}) = 499{,}25 \text{ Вт},$$

$$P_{CB} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{CB}\overset{*}{\underline{I}}_C) = \mathrm{Re}(220e^{j90^\circ} \cdot 15{,}74e^{-j68{,}23^\circ}) = 3215{,}83 \text{ Вт}.$$

Алгебраическая сумма показаний ваттметров

$$P = P_{AB} + P_{CB} = 499{,}25 + 3215{,}83 = 3715{,}08 \text{ Вт}$$

совпадает с суммарными потерями в цепи:

$$P_{\Sigma R} = 3 \cdot R_Л I_A^2 + 3RI_{AB}^2 = 3 \cdot 3 \cdot 15{,}74^2 + 3 \cdot 6 \cdot 9{,}09^2 =$$
$$= 2229{,}45 + 1487{,}40 = 3716{,}85 \text{ Вт}.$$

Ответ: $I_Ф = 9{,}09$ А, $I_Л = 15{,}74$ А, $P = 3715{,}08$ Вт.

Задача 7.5

К зажимам сети трехфазного тока с симметричными линейными напряжениями присоединена статическая нагрузка с индуктивно связанными фазами. Найдите токи на всех участках цепи при $U_Л = 380$ В, $R_Л = 3$ Ом, $X_Л = 4$ Ом, $R = 6$ Ом, $X_{L1} = 12$ Ом, $X_M = 5$ Ом.

Проверьте полученные результаты по балансу мощностей, используя метод двух ваттметров.

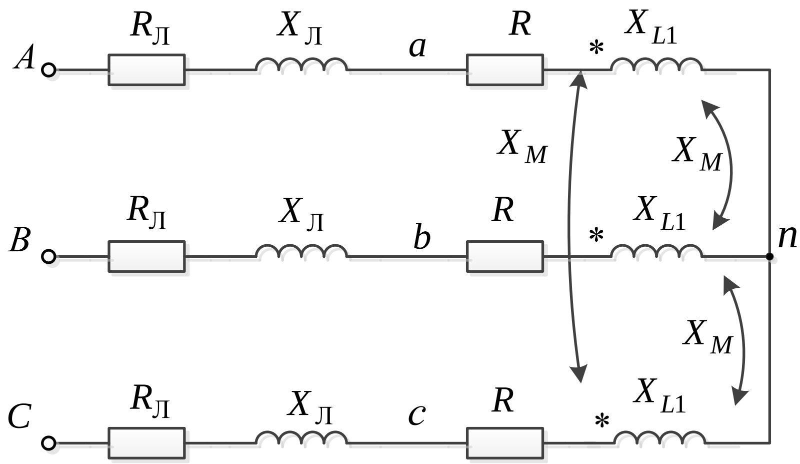


Рис. 7.9

Ответ: $I_Ф = I_Л = 15{,}44$ А, P = 6436 Вт.

Задача 7.6

Активная мощность и коэффициент мощности трехфазного электродвигателя равны 50 кВт, cosφ = 0,8, соответственно; обмотки двигателя соединены треугольником и включены на линейное напряжение 220 В. Определить токи в подводящих проводах и обмотках двигателя.

Ответ: 164 А, 94,7 А.

Задача 7.7

В трехфазную цепь с линейным напряжением 380 В включен электродвигатель, фазы которого соединены звездой. Активная мощность двигателя 50 кВт, cosφ = 0,8. Определить эквивалентное сопротивление $\underline{Z} = R + jX_L$ каждой фазы двигателя.

Ответ: 1,85 + *j*1,39 Ом.

Задача 7.8

В цепь электродвигателя (рис. 7.10) с линейным напряжением 380 В включены два ваттметра, показания которых равны 398 Вт и 2670 Вт, соответственно. Определить комплексное сопротивление каждой из фаз двигателя, соединенных звездой.

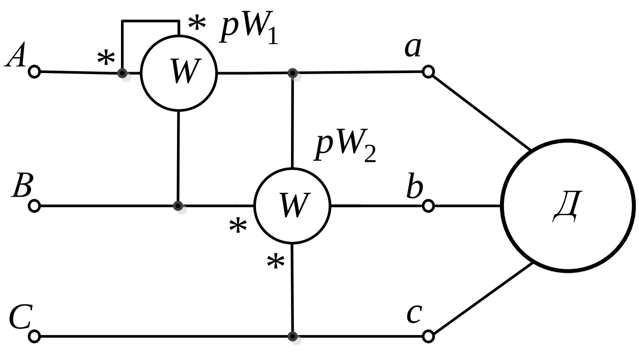


Рис. 7.10

Ответ: 15 + j20 Ом.

Задача 7.9

Определить токи I_A, I_B, I_C, I_N и напряжения U_{An}, U_{nN} при следующих положениях ключей (рис. 7.11):

а) $K1$ – замкнут, $K2$, $K3$ – разомкнуты;

б) $K1$, $K3$ – замкнуты, $K2$ – разомкнут;

в) все три ключа разомкнуты, если $U_Ф$ = 100 В, R = 10 Ом.

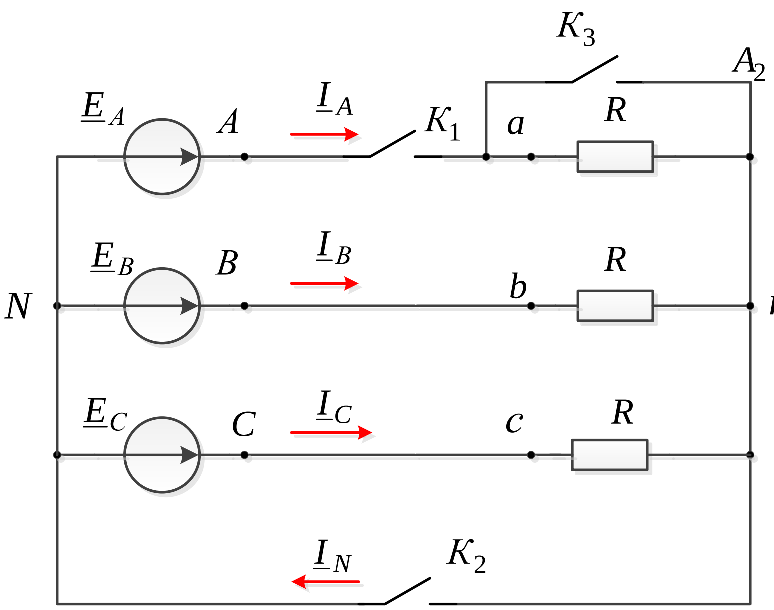


Рис. 7.11

Ответ: а) 10 А; 10 А; 10 А; 0; 100 В; 0,

б) 30 А; $10\sqrt{3}$ А; $10\sqrt{3}$ А; 0; 0; 100 В,

в) 0 ; $5\sqrt{3}$ А; $5\sqrt{3}$ А; 0; 150 В; 50 В.

Задача 7.10

Определить показания приборов и активную мощность цепи (рис. 7.12), где $U_Л$ = 380 В, ωL_1 = 10 Ом, ωL_2 = 5 Ом, ωL = 15 Ом, R = 30 Ом, $1/\omega C$ = 30 Ом,

а) при включенной конденсаторной батарее;

б) при отключенной конденсаторной батарее.

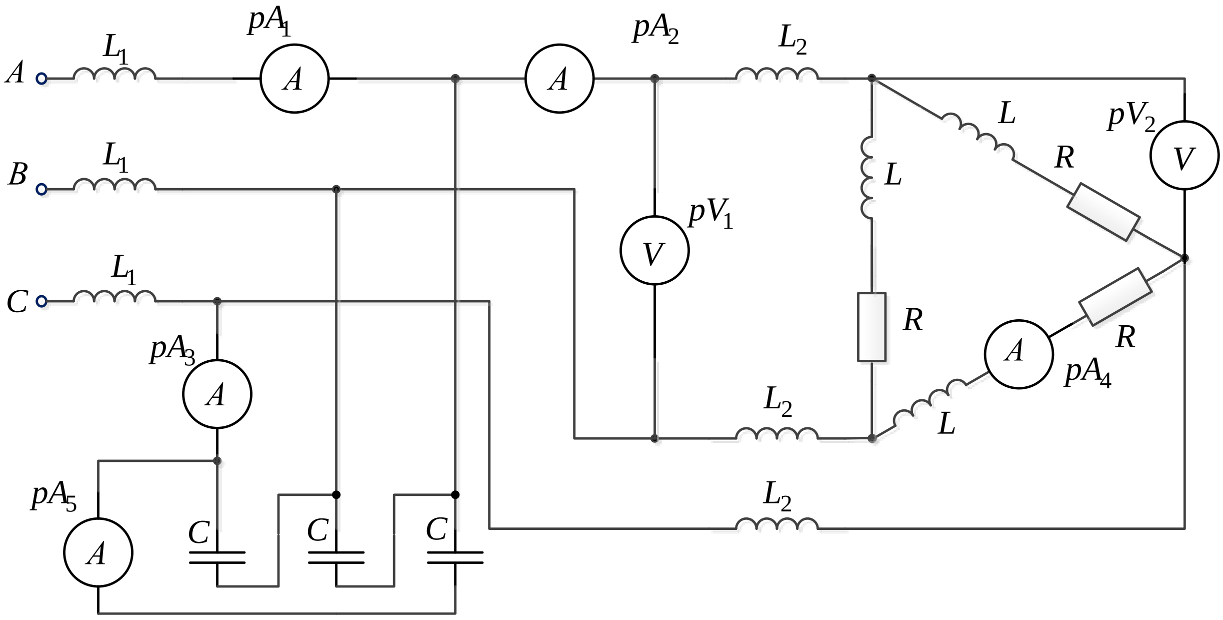


Рис. 7.12

Ответ: а) 22 А; 22 А; 31,1 А; 12,7 А; 17,96 А; 539 В; 427 В; 14,5 кВт; б) 9,82 А; 9,82 А; 0; 5,67 А; 0; 239 В; 190,5 В; 2,9 кВт.

Задача 7.11

К трехфазному генератору подключен симметричный приемник, фазы которого соединены звездой (рис. 7.13). Сопротивления приемника носят активно-индуктивный характер, при этом полное сопротивление фазы Z = 100 Ом, cosφ = 0,8.

Определить показания ваттметров при $U_{Л}$ = 220 В.

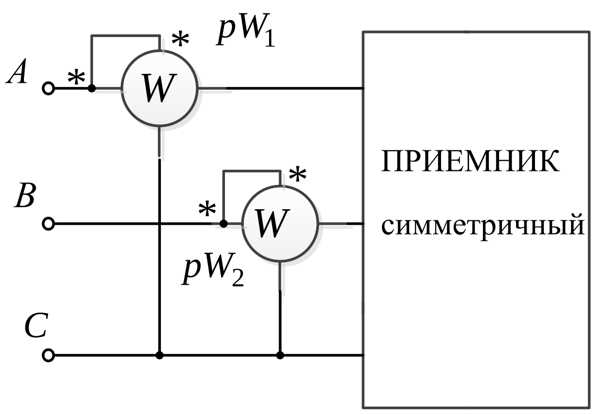


Рис. 7.13

Ответ: 277,4 Вт; 109,7 Вт.

Задача 7.12

Чему равно показание ваттметра, включенного, как показано на рис. 7.14?
R = 12 Ом; X = 9 Ом; $U_{Л}$ = 380 В.

Ответ: − 3,34 кВАр.

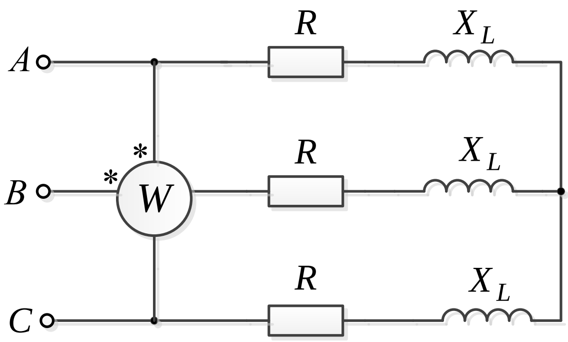
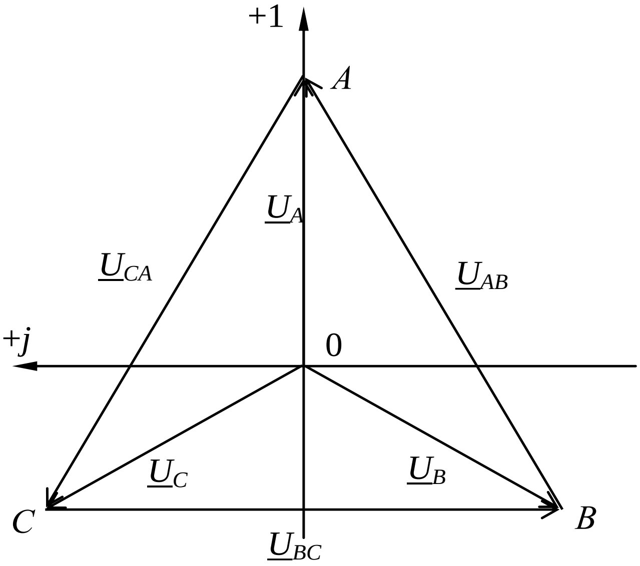


Рис. 7.14

8. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

8.1. Краткие теоретические сведения

Симметричная трехфазная система ЭДС



$$\underline{U}_A = U = U_Ф\ ,$$

$$a = e^{j120^\circ},$$

$$\underline{U}_B = a^2\underline{U}_B = U e^{-j120^\circ} = U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\underline{U}_C = a\underline{U}_C = U e^{j120^\circ} = U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

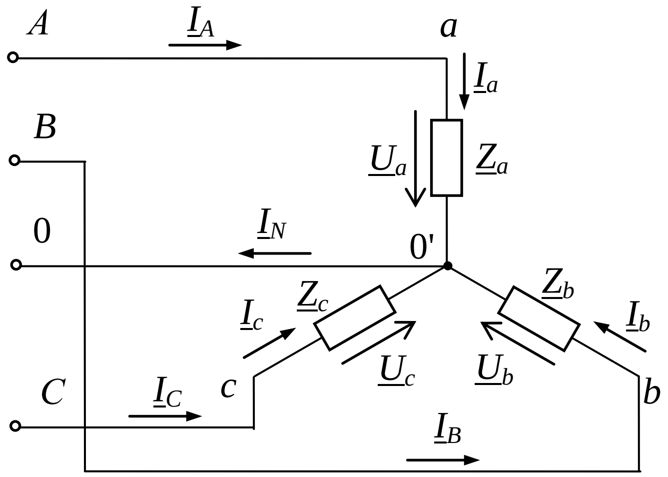
$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_Л\, e^{j30^\circ},$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = U_Л\, e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = U_Л\, e^{j150^\circ},$$

$$U_Л = \sqrt{3}\,U_Ф.$$

Соединение нагрузки звездой с нейтральным проводом



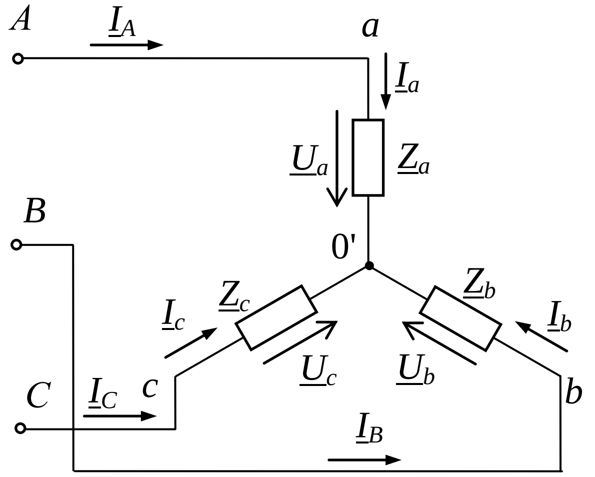
$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c},$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C\,.$$

Соединение нагрузки звездой без нейтрального провода



$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{E}_A\underline{Y}_a + \underline{E}_B\underline{Y}_b + \underline{E}_C\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_a = \underline{Y}_a\underline{U}_a = \underline{Y}_a\,(\underline{E}_A - \underline{U}_{0'0}),$$

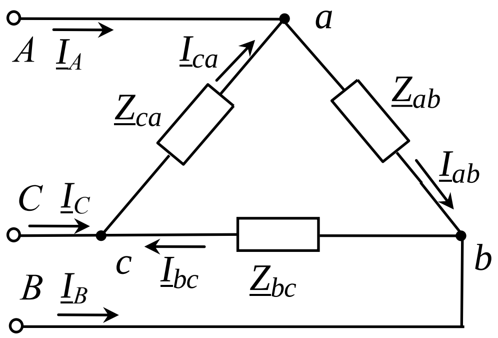
$$\underline{I}_B = \underline{I}_b = \underline{Y}_b\underline{U}_b = \underline{Y}_b\,(\underline{E}_B - \underline{U}_{0'0}),$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_c = \underline{Y}_c\underline{U}_c = \underline{Y}_c\,(\underline{E}_C - \underline{U}_{0'0}),$$

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_b - \underline{U}_{CA}\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

$$\underline{U}_b = \frac{\underline{U}_{BC}\underline{Y}_c - \underline{U}_{AB}\underline{Y}_a}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}, \qquad \underline{U}_c = \frac{\underline{U}_{CA}\underline{Y}_a - \underline{U}_{BC}\underline{Y}_b}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Соединение нагрузки треугольником

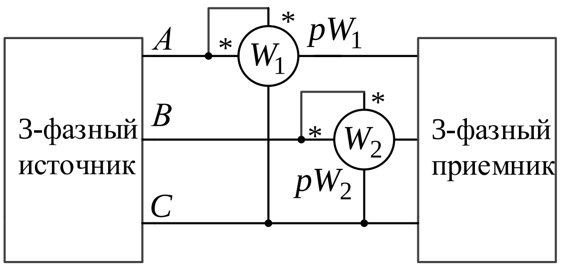


$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB}, \ \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}, \ \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA}$$

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}, \ \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}, \ \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}, \ \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}, \ \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}$$

Измерение мощности



$$P = P_A + P_B + P_C,$$
$$Q = Q_A + Q_B + Q_C,$$
$$S = S_A + S_B + S_C;$$
$$\underline{S} = \underline{U}_A \overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{U}_B \overset{*}{\underline{I}}_B + \underline{U}_C \overset{*}{\underline{I}}_C =$$
$$= \underline{U}_{AC} \overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{U}_{BC} \overset{*}{\underline{I}}_B,$$
$$P = pW_1 + pW_2.$$

8.2. Примеры и задачи

Задача 8.1

К трехфазной линии с линейным напряжением 380 В присоединен приемник (рис. 8.1), где $R = \omega L = 1/\omega C$ = = 11 Ом.

Определить:

а) ток $\underline{I}_N$;

б) напряжение смещения нейтрали и напряжения на нагрузках при обрыве нулевого провода в точке *m*.

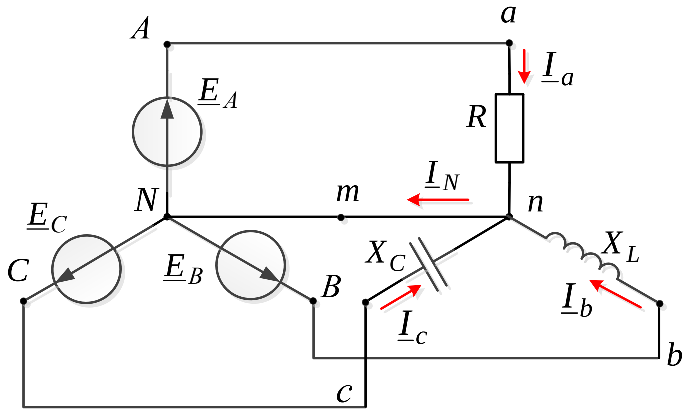


Рис. 8.1

Решение

а) Примем $\underline{E}_A = E_A = 380/\sqrt{3} = 220$ В, $\underline{E}_B = 220e^{-j120°}$ В, $\underline{E}_C = 220e^{j120°}$ В.

Потенциалы нейтралей источника и приемника одинаковы, т. к. сопротивление нулевого провода равно нулю $\underline{\varphi}_0 = \underline{\varphi}_{01} = \underline{\varphi}_{02}$. Поэтому фазные напряжения на приемниках известны и равны:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_A, \quad \underline{U}_b = \underline{E}_B, \quad \underline{U}_c = \underline{E}_C.$$

Фазные токи в приемниках:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{11} = 20 \text{ А},$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{220e^{-j120°}}{j11} = 20e^{-j210°} \text{ А},$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{220e^{j120°}}{-j11} = 20e^{j210°} \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа для узла n имеем:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 20 + 20e^{-j210°} + 20e^{j210°} = -14{,}6 \text{ А}.$$

При этом векторная диаграмма токов примет вид изображенный на рис. 8.2.

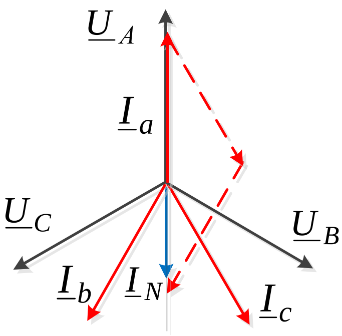


Рис. 8.2

б) При обрыве нулевого провода в точке m напряжение смещения нейтрали равно:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A \frac{1}{\underline{Z}_a} + \underline{E}_B \frac{1}{\underline{Z}_b} + \underline{E}_C \frac{1}{\underline{Z}_c}}{\frac{1}{\underline{Z}_a} + \frac{1}{\underline{Z}_b} + \frac{1}{\underline{Z}_c}} = \frac{\frac{220}{11} + \frac{220e^{-j120°}}{j11} + \frac{220e^{j120°}}{-j11}}{\frac{1}{11} + \frac{1}{j11} + \frac{1}{-j11}} =$$

$$= 220 + 220e^{-j210°} + 220e^{j210°} = -160 \text{ В}.$$

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN} = 220 - (-160) = 380 \text{ В},$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN} = 220(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-160) = 197e^{-j75,3°} \text{ В}.$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN} = 220(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-160) = 197e^{j75,3°} \text{ В}.$$

На топографической диаграмме показано напряжение смещения нейтрали (точка *n*) и напряжения на фазах нагрузки (рис. 8.3).

Ответ: а) $\underline{I}_N = -14,6$ А,

б) $\underline{U}_{nN} = -160$ В, $\underline{U}_a = 380$ В,

$\underline{U}_b = 197e^{-j75,3°}$ В,

$\underline{U}_c = 197e^{j75,3°}$ В.

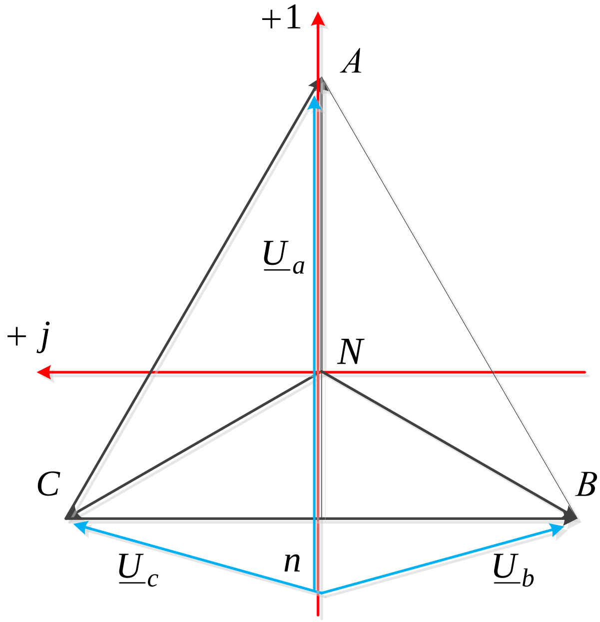


Рис. 8.3

Задача 8.2

Определить токи в фазах приемников, соединенных звездой и треугольником (рис. 8.4), а также активную мощность цепи, если: $R_2 = \omega L = 1/\omega C = 10$ Ом, $R_1 = \omega L_1 = 5$ Ом, $U_Л = 660$ В.

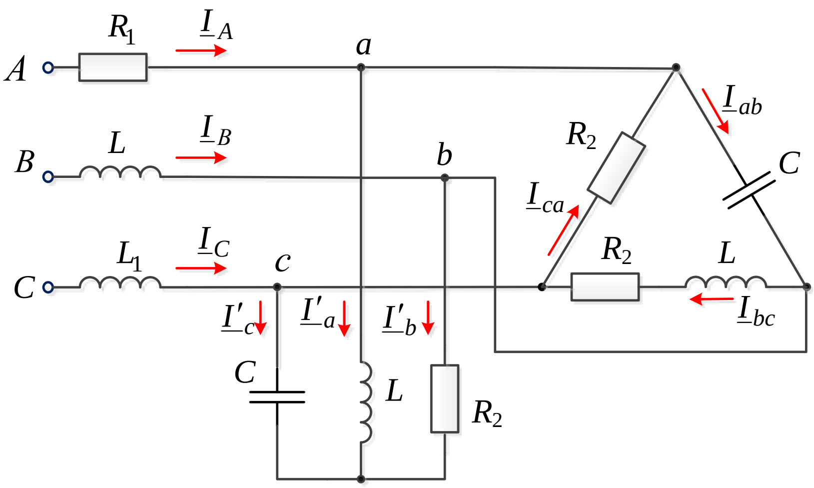


Рис. 8.4

Решение

Предположим, что фазы источника соединены звездой с фазными напряжениями $E_A = E_B = E_C = \dfrac{660}{\sqrt{3}} = 380$ В, причем $\underline{E}_A = 380$ В, $\underline{E}_B = 380e^{-j120°}$ В, $\underline{E}_C = 380e^{j120°}$ В.

Преобразуем звезду сопротивлений в эквивалентный треугольник (рис. 8.5), тогда

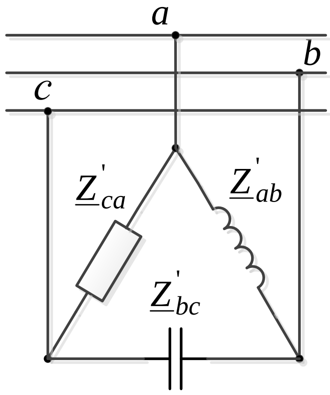


Рис. 8.5

$$\underline{Z}_{ab}' = j\omega L + R_2 + \frac{j\omega L R_2}{-j\dfrac{1}{\omega C}}, \quad \underline{Z}_{ab}' = j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{bc}' = R_2 - j\frac{1}{\omega C} + \frac{R_2(-j\dfrac{1}{\omega C})}{j\omega L}, \ \underline{Z}_{bc}' = -j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ca}' = -j\frac{1}{\omega C} + j\omega L + \frac{(-j\dfrac{1}{\omega C})j\omega L}{R_2}, \quad \underline{Z}_{ca}' = 10 \text{ Ом}.$$

Поскольку соответствующие фазы треугольников соединены параллельно, получим эквивалентную схему (рис. 8.6) с сопротивлениями фаз:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ab}'(-j\dfrac{1}{\omega C})}{\underline{Z}_{ab}' - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{j10(-j10)}{j10 - j10} = \infty,$$

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\underline{Z}_{bc}'(R_2 + j\omega L)}{\underline{Z}_{bc}' + j\omega L + R_2} = \frac{-j10(10+j10)}{-j10+j10+10} =$$

$$= 10 - j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ca} = \frac{\underline{Z}_{ca}' R_2}{\underline{Z}_{ca}' + R_2} = \frac{10\cdot 10}{10+10} = 5 \text{ Ом}.$$

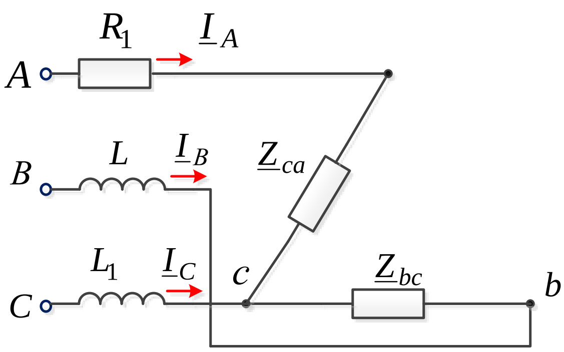


Рис. 8.6

Схему на рис. 8.6 можно рассматривать как соединение приемников звездой с нейтральной точкой *c*.

Сопротивления фаз звезды соответственно:

$$\underline{Z}_a = R_1 + \underline{Z}_{ca} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом};$$
$$\underline{Z}_b = j\omega L + \underline{Z}_{bc} = j10 + 10 - j10 = 10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = j\omega L_1 = j5 \text{ Ом}.$$

Напряжение смещения нейтрали:

$$\underline{U}_{cN} = \frac{\underline{E}_A \dfrac{1}{\underline{Z}_a} + \underline{E}_B \dfrac{1}{\underline{Z}_b} + \underline{E}_C \dfrac{1}{\underline{Z}_c}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_a} + \dfrac{1}{\underline{Z}_b} + \dfrac{1}{\underline{Z}_c}} = \frac{\dfrac{380}{10} + \dfrac{380 e^{-j120^\circ}}{10} + \dfrac{380 e^{j120^\circ}}{j5}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{j5}} =$$

$$= 301 e^{j48,4} = 199,84 + j225,09 \quad \text{В},$$

где точка N − нейтраль генератора.

Линейные токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{cN}}{\underline{Z}_a} = \frac{380 - 199,84 - j225,09}{10} = 18 - j22,5 \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{cN}}{\underline{Z}_b} = \frac{380 e^{-j120^\circ} - 199,84 - j225,09}{10} = -39 - j55,5 \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{cN}}{\underline{Z}_c} = \frac{380 e^{-j120^\circ} - 199,84 - j225,09}{j5} = 21 + j78 \text{ А}.$$

Уравнение $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ выполняется.

Напряжения на фазах приемника, соединенного треугольником (рис. 8.5):

$$\underline{U}_{ca} = -\underline{Z}_{ca} \underline{I}_A = -5(18 - j22,5) = -90 + j112,5 = 144 e^{j128,4^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{Z}_{bc} \underline{I}_B = (10 - j10)(-39 - j55,5) = -945 - j165 = 959 e^{-j170,1^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{ab} = -\underline{U}_{ca} - \underline{U}_{bc} = 90 - j112,5 + 945 + j165 = 1035 + j52,5 = 1036 e^{j2,9^\circ} \text{ В}.$$

Токи в фазах приемника, соединенного треугольником (рис. 8.4):

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{1036 e^{j2,9^\circ}}{10 e^{-j90^\circ}} = 103,6 e^{j92,9^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{R_2 + j\omega L} = \frac{959 e^{-j170,1^\circ}}{10 + j10} = 67,8 e^{-j215,1^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{R_2} = \frac{144 e^{j128,4^\circ}}{10} = 14,4 e^{j128,6^\circ} \text{ А}.$$

Напряжения $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ для приемника, соединенного звездой, являются линейными. Зная их, определим фазные напряжения для звезды (рис. 8.4):

$$\underline{U}_a{}' = \frac{\underline{U}_{ab}\dfrac{1}{R_2} - \underline{U}_{ca}\dfrac{1}{-j(1/\omega C)}}{\dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{-j(1/\omega C)}}, \qquad \underline{U}_a{}' = 1152\, e^{j7^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_b{}' = \frac{\underline{U}_{bc}\dfrac{1}{-j(1/\omega C)} - \underline{U}_{ab}\dfrac{1}{j\omega L}}{\dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{-j(1/\omega C)}}, \qquad \underline{U}_b{}' = 144 e^{j38,7^\circ} \text{В};$$

$$\underline{U}_c{}' = \frac{\underline{U}_{ca}\dfrac{1}{j\omega L} - \underline{U}_{bc}\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{-j(1/\omega C)}}, \qquad \underline{U}_c{}' = 1084\, e^{j13,5^\circ} \text{ В.}$$

Фазные токи:

$$\underline{I}_a{}' = \frac{\underline{U}_a{}'}{j\omega L} = \underline{I}_a{}' = \frac{\underline{U}_a{}'}{j\omega L} = \frac{1152\, e^{j7^\circ}}{j10} = 115{,}2 e^{-j83^\circ} = 14{,}04 - j114{,}34 \text{ А},$$

$$\underline{I}_b{}' = \frac{\underline{U}_b{}'}{R_2} = \frac{144 e^{j38,7^\circ}}{10} = 14{,}4 e^{j38,7^\circ} = 11{,}24 + j9 \text{ А},$$

$$\underline{I}_c{}' = \frac{\underline{U}_c{}'}{-j(1/\omega C)} = \underline{I}_c{}' = \frac{\underline{U}_c{}'}{-j(1/\omega C)} = \frac{1084\, e^{j13,5^\circ}}{-j10} = 108{,}4 e^{j103,5^\circ} = -25{,}28 + j105{,}34$$

Условие $\underline{I}_a{}' + \underline{I}_b{}' + \underline{I}_c{}' \cong 0$ выполняется.

Активная мощность трехфазной цепи (рис. 8.4) равна суммарной мощности потерь в резисторах:

$$P = (I_A)^2 R_1 + (I_b{}')^2 R_2 + (I_{bc})^2 R_2 + (I_{ca})^2 R_2 =$$

$$= 28{,}8^2 \cdot 5 + 14{,}4^2 \cdot 10 + 67{,}8^2 \cdot 10 + 14{,}4^2 \cdot 10 = 54{,}2 \text{ Вт.}$$

Эта мощность равна активной мощности, развиваемой источником

$$P = \mathrm{Re}(\underline{E}_A \overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{E}_B \overset{*}{\underline{I}}_B + \underline{E}_C \overset{*}{\underline{I}}_C) \quad = \mathrm{Re}\left(380 \cdot 28{,}8 e^{j51,2^\circ}\right) +$$

$$+ \mathrm{Re}\left(380 e^{-j120^\circ} \cdot 67{,}8 e^{j125,1^\circ}\right) + \mathrm{Re}\left(380 e^{j120^\circ} \cdot 80{,}7 e^{-j75^\circ}\right) = 54{,}2 \text{ Вт.}$$

Ответ: $\underline{I}_{ab} = 103{,}3e^{j92{,}9°}$ А, $\underline{I}_{bc} = 67{,}8e^{-j215{,}1}$ А, $\underline{I}_{ca} = 14{,}4e^{j128{,}6°}$ А; $\underline{I}_a' = 115{,}2e^{-j83°}$ А, $\underline{I}_b' = 14{,}4e^{j38{,}7°}$ А, $\underline{I}_c' = 108{,}4e^{j103{,}5°}$ А; $P = 54{,}2$ Вт.

Задача 8.3

Найти показания приборов, построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов, если: $U_Л = 220$ В, $R_1 = 22$ Ом, $R_2 = 19$ Ом, $X_L = X_C = 11$ Ом (рис. 8.7).

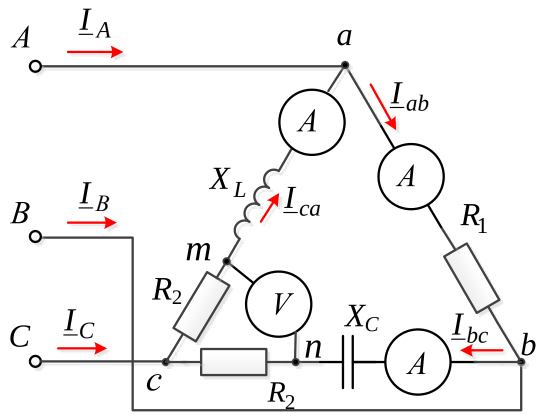


Рис. 8.7

Решение

Определим фазные токи приемника:

$$I_{ab} = \frac{U_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А},$$

$$I_{bc} = \frac{U_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{U_{bc}}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} = \frac{220}{\sqrt{19^2 + 11^2}} = 10 \text{ А},$$

$$I_{ca} = \frac{U_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{U_{ca}}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = \frac{220}{\sqrt{19^2 + 11^2}} = 10 \text{ А}.$$

Пусть вектор $\underline{E}_A$ совпадает с действительной осью. Построим фазные токи на комплексной плоскости (рис. 8.8).

Ток $\underline{I}_{ab}$ совпадает по фазе с $\underline{U}_{ab}$, ток $\underline{I}_{bc}$ опережает $\underline{U}_{bc}$ на угол, равный $\operatorname{arctg}\dfrac{X_C}{R_2} = 30°$, а ток $\underline{I}_{ca}$ отстает от $\underline{U}_{ca}$ на угол, равный $\operatorname{arctg}\dfrac{X_L}{R_2} = 30°$.

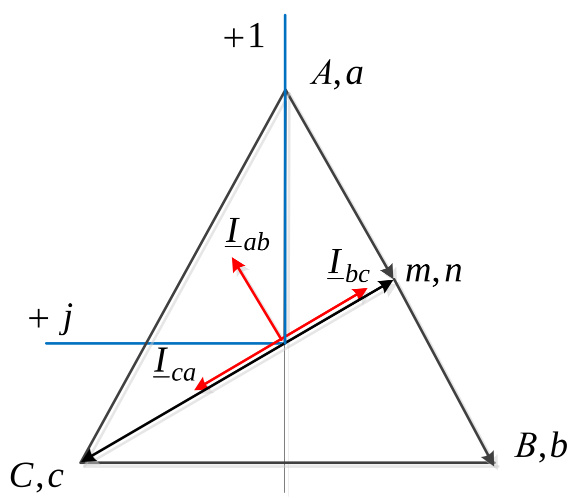


Рис. 8.8

Построим точку m на топографической диаграмме, учитывая $\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{cm} + \underline{U}_{ma}$, где $\underline{U}_{cm}$ совпадает по фазе с током $\underline{I}_{ca}$, а $\underline{U}_{ma}$ ортогонален $\underline{U}_{cm}$.

Аналогично строим точку n, учитывая, что $\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{bn} + \underline{U}_{nc}$.

Таким образом, точки m и n совпали, их потенциалы одинаковы и показание вольтметра равно нулю.

Ответ: $pA_1 = 10$ А, $pA_2 = 10$ А, $pA_3 = 10$ А, $pV = 0$.

Задача 8.4

Фазоуказатель, состоящий из двух одинаковых ламп с активным сопротивлением R (40 Вт, 220 В) и конденсатора $X_C = R$, подключен к линии с линейным напряжением $U_Л = 220$ В .

Определить:

а) ток в фазе B, если конденсатор подключен к фазе A, а лампа в фазе B замкнута накоротко;

б) напряжение на конденсаторе и лампе фазоуказателя при обрыве линейного провода фазы B (*решить самостоятельно*).

Решение

Сопротивление каждой лампы и конденсатора

$$R = X_C = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{40} = 1210 \text{ Ом}.$$

При коротком замыкании фазы B конденсатор и лампа в фазе C окажутся под линейным напряжением $U_Л$ (рис. 8.9). Приняв $\underline{E}_A = E_A$, получим напряжения на конденсаторе и лампе:

$$\underline{U}_{An} = \underline{U}_{AB} = 220e^{j30°} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{Cn} = \underline{U}_{CB} = 220e^{j90°} \text{ В}.$$

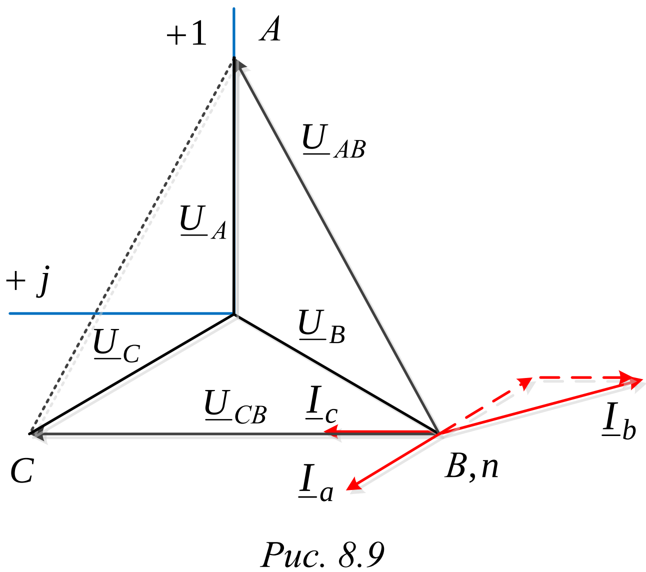


Рис. 8.9

Соответственно токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{An}}{-jX_C} = \frac{220\,e^{j30°}}{1210\,e^{-j90°}} = 0{,}182\,e^{j120°}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{Cn}}{R} = \frac{220\,e^{j90°}}{1210} = 182\,e^{j90°}\ \text{А},$$

$$\left|\underline{I}_B\right| = \left|-\underline{I}_A - \underline{I}_C\right| = \left|0{,}182\,e^{j120°} - 0{,}182\,e^{j90°}\right| = 0{,}094\ A.$$

Ответ: а) I_B = 0,094 А; б) $U_R = U_C$ = 156 В.

Задача 8.5

Найти ток через амперметр, соединяющий нейтрали двух приемников, если: $R = 1/\omega C = \omega L$ = 20 Ом, $U_Л$ = 380 В (рис. 8.10).

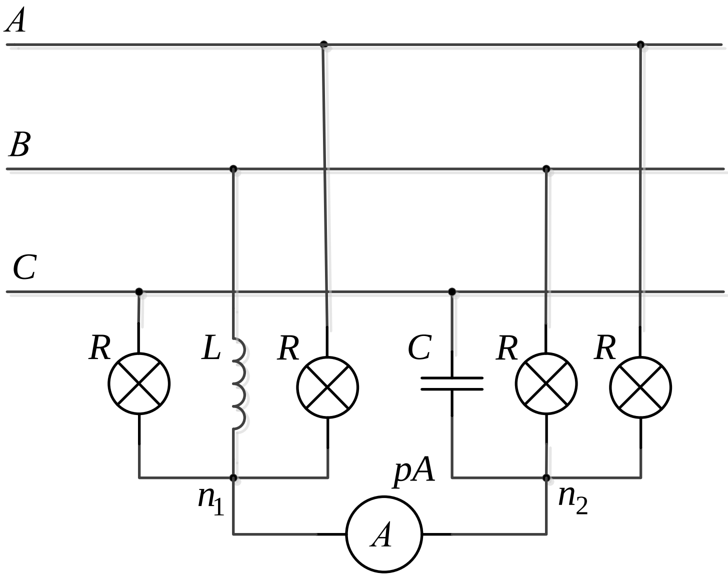


Рис. 8.10

Решение

Примем $\underline{E}_A = E_A = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220$ В.

Тогда $\underline{E}_B = 220e^{-j120°}$ В, $\underline{E}_C = 220e^{j120°}$ В.

Ток через амперметр определим с помощью теоремы об эквивалентном генераторе

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ЭГ}}{\underline{Z}_{ЭГ}},$$

считая, что сопротивление амперметра бесконечно мало.

Для нахождения напряжения $\underline{U}_{\text{ЭГ}} = \underline{\varphi}_{n_1} - \underline{\varphi}_{n_2}$ в режиме холостого хода находим смещение нейтралей $\underline{\varphi}_{n_1}$, $\underline{\varphi}_{n_2}$ относительно нейтральной точки трехфазной системы ЭДС:

$$\underline{\varphi}_{n_1} = \frac{\underline{E}_A \dfrac{1}{R} + \underline{E}_B \dfrac{1}{j\omega L} + \underline{E}_C \dfrac{1}{R}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R}} = \frac{\dfrac{220}{20} + \dfrac{220e^{-j120°}}{j20} + \dfrac{220e^{j120°}}{20}}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{j20} + \dfrac{1}{20}} =$$

$$= -93{,}2 + j103{,}3 \text{ В},$$

$$\underline{\varphi}_{n_2} = \frac{\underline{E}_A \dfrac{1}{R} + \underline{E}_B \dfrac{1}{R} + \underline{E}_C \dfrac{1}{-j(1/\omega C)}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + j\omega C} = \frac{\dfrac{220}{20} + \dfrac{220e^{-j120°}}{20} + \dfrac{220e^{j120°}}{-j20}}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{-j20}} =$$

$$= -93{,}2 - j103{,}3 \text{ В}.$$

Следовательно, $\underline{U}_{\text{ЭГ}} = j206{,}6$ В.

Входное сопротивление эквивалентного генератора относительно точек n_1 и n_2 (зажимы *A, B, C* закорочены, так как внутренние сопротивления источников ЭДС равны нулю) (рис. 8.11)

$$\underline{Z}_{\text{ЭГ}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L} + \dfrac{1}{R}} + \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + j\omega C} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{j20} + \dfrac{1}{20}} + \frac{1}{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20} + j\dfrac{1}{20}} = 16 \text{ Ом}.$$

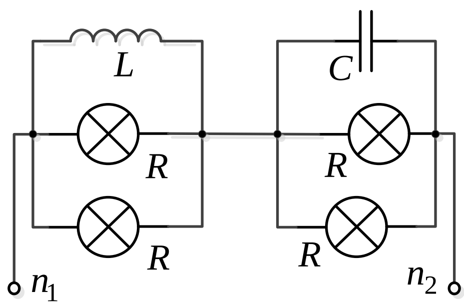


Рис. 8.11

Амперметр покажет:

$$pA = \frac{U_{\text{ЭГ}}}{Z_{\text{ЭГ}}} = \frac{206{,}6}{16} = 13 \text{ А}.$$

Ответ: $pA = 13$ А.

Задача 8.6

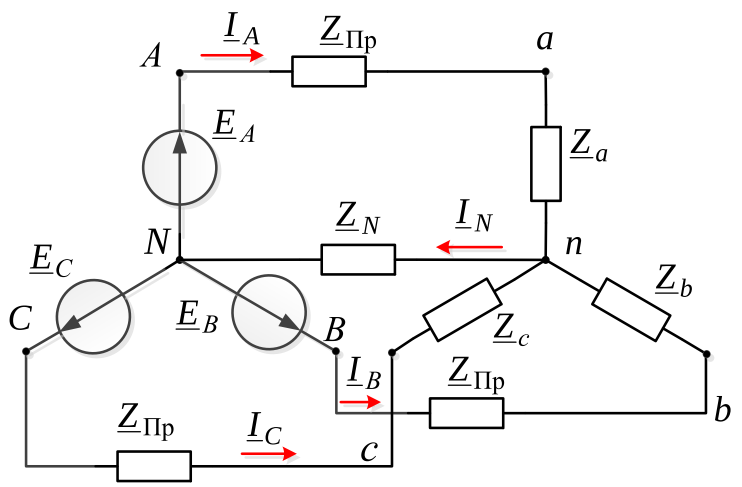


Рис. 8.12

Дано:
$\underline{E}_A = -2 - j2$ В,
$\underline{E}_B = 2$ В,
$\underline{E}_C = 2$ В,
$\underline{Z}_a = j1$ Ом,
$\underline{Z}_b = -j2$ Ом,
$\underline{Z}_c = 1 + j1$ Ом,
$\underline{Z}_N = 0{,}1$ Ом,
$\underline{Z}_{Пр} = 0{,}1$ Ом.

Найти фазные токи а) для заданных параметров цепи (рис. 8.12) и б) для случая, когда $\underline{Z}_N = \infty$ и $\underline{Z}_{Пр} = 0$.

Решение

При решении этой задачи используем *метод симметричных составляющих* (МСС).

Основное назначение ММС – расчет *динамических* трехфазных систем, т. е. устройств, содержащих вращающиеся электрические машины. Цель нашего расчета – получение навыка применения ММС на простых примерах статических трехфазных систем, каковой является цепь на рис. 8.12.

Разложим заданную систему ЭДС на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей:

1) *составляющая нулевой последовательности:*

$$\underline{E}_0 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C) = \frac{1}{3}\left[(-2 - j2) + 2 + 2\right] = \frac{2 - j2}{3} = 0{,}667 - j0{,}667 \text{ В};$$

2) *составляющая прямой последовательности* ($a = e^{j120°}$):

$$\underline{E}_1 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a\underline{E}_B + a^2\underline{E}_C) = \frac{1}{3}\left[(-2 - j2) + e^{j120°} \cdot 2 + e^{j240°} \cdot 2\right] = \frac{-4 - j2}{3} =$$

$$= -1{,}333 - j0{,}667 \text{ В};$$

3) *составляющая обратной последовательности:*

$$\underline{E}_2 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a^2\underline{E}_B + a\underline{E}_C) = \frac{1}{3}\left[(-2 - j2) + e^{j240^\circ}\cdot 2 + e^{j120^\circ}\cdot 2\right] = \frac{-4 - j2}{3} =$$

$$= -1{,}333 - j0{,}667 \text{ В.}$$

Ключевой является идея представления неизвестных напряжений ($\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$, $\underline{U}_c$) и токов ($\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$) через симметричные составляющие ($\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$) и ($\underline{I}_0$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$) и в соответствии с принципом наложения записи уравнений Кирхгофа для каждой последовательности отдельно. То есть соответствующие *симметричные* схемы для различных последовательностей рассматриваются отдельно друг от друга.

а) Выражения второго закона Кирхгофа для каждой последовательности можно представить в виде следующих трех уравнений:

$$(\underline{Z}_{\text{Пр}} + 3\underline{Z}_N)\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = \underline{E}_0, \qquad \underline{Z}_{\text{Пр}}\underline{I}_1 + \underline{U}_1 = \underline{E}_1, \qquad \underline{Z}_{\text{Пр}}\underline{I}_2 + \underline{U}_2 = \underline{E}_2.$$

Еще три уравнения можно составить, записав выражения закона Ома:

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_a\underline{I}_A, \quad \underline{U}_B = \underline{Z}_b\underline{I}_B, \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_c\underline{I}_C,$$

в которых токи и напряжения ветвей представлены через симметричные составляющие:

$$\underline{Z}_a(\underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2,$$
$$\underline{Z}_b(\underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2) = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2,$$
$$\underline{Z}_c(\underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2) = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2.$$

В результате получим систему шести уравнений:

$$\begin{cases} (\underline{Z}_{\text{Пр}} + 3\underline{Z}_N)\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = \underline{E}_0, \\ \underline{Z}_{\text{Пр}}\underline{I}_1 + \underline{U}_1 = \underline{E}_1, \\ \underline{Z}_{\text{Пр}}\underline{I}_2 + \underline{U}_2 = \underline{E}_2, \\ \underline{Z}_a(\underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \\ \underline{Z}_b(\underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2) = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2, \\ \underline{Z}_c(\underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2) = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2. \end{cases}$$

После подстановки численных значений эта система примет вид:

$$
\begin{cases}
0{,}4\cdot \underline{I}_0+\underline{U}_0=0{,}667-j0{,}667,\\
0{,}1\cdot \underline{I}_1+\underline{U}_1=-1{,}333-j0{,}667,\\
0{,}1\cdot \underline{I}_2+\underline{U}_2=-1{,}333-j0{,}667,\\
j\cdot \underline{I}_0+j\cdot \underline{I}_1+j\cdot \underline{I}_2-\underline{U}_0-\underline{U}_1-\underline{U}_2=0,\\
-j2\cdot \underline{I}_0+(-1{,}732+j)\cdot \underline{I}_1+(1{,}732+j)\cdot \underline{I}_2-\underline{U}_0+(0{,}5+j0{,}866)\cdot \underline{U}_1+\\
+(0{,}5-j0{,}866)\cdot \underline{U}_2=0,\\
(1+j)\cdot \underline{I}_0+(-1{,}366+j0{,}366)\cdot \underline{I}_1+(0{,}366-j1{,}366)\cdot \underline{I}_2-\underline{U}_0+\\
+(0{,}5-j0{,}866)\cdot \underline{U}_1+(0{,}5+j0{,}866)\cdot \underline{U}_2=0.
\end{cases}
$$

В результате решения получим

$$\underline{I}_0=-0{,}405+j0{,}552=0{,}685e^{j126{,}26^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_1=-1{,}568+j0{,}302=1{,}597e^{j169{,}10^\circ}\ \text{А}.$$

$$\underline{I}_2=-0{,}358+j0{,}790=0{,}867e^{j114{,}36^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{U}_0=0{,}829-j0{,}888=1{,}215e^{-j46{,}90^\circ}\ \text{В},$$

$$\underline{U}_1=-1{,}176-j0{,}697=1{,}367e^{-j149{,}34^\circ}\ \text{В},$$

$$\underline{U}_2=-1{,}297-j0{,}746=1{,}496e^{-j150{,}10^\circ}\ \text{В}.$$

Искомые токи фаз определяются из выражений:

$$\underline{I}_A=\underline{I}_0+\underline{I}_1+\underline{I}_2=-0{,}405+j0{,}552+(-1{,}568+j0{,}302)+(-0{,}358+j0{,}790)=$$
$$=-2{,}331+j1{,}644=2{,}853e^{j144{,}79^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_B=\underline{I}_0+a^2\underline{I}_1+a\underline{I}_2=-0{,}405+j0{,}552+e^{j240^\circ}\cdot 1{,}597e^{j169{,}10^\circ}+$$
$$+e^{j120^\circ}\cdot 0{,}867e^{j114{,}36^\circ}=0{,}136+j1{,}055=1{,}063e^{j82{,}67^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{I}_C=\underline{I}_0+a\underline{I}_1+a^2\underline{I}_2=-0{,}405+j0{,}552+e^{j120^\circ}\cdot 1{,}597e^{j169{,}10^\circ}+$$
$$+e^{j240^\circ}\cdot 0{,}867e^{j114{,}36^\circ}=1{,}431e^{-j46{,}74^\circ}\ \text{А}.$$

б) Если нейтральный провод отсутствует ($\underline{Z}_N=\infty$), а линейные провода идеальны ($\underline{Z}_{\text{Пр}}=0$), то поделив первое уравнение системы на $\underline{Z}_N$ и устремив $\underline{Z}_N\to\infty$, получим $\underline{I}_0=0$. Принимая во внимание, что $\underline{Z}_{\text{Пр}}=0$, из второго и третьего уравнений находим:

$$\underline{U}_1=\underline{E}_1,\qquad \underline{U}_2=\underline{E}_2,$$

что позволяет систему уравнений для последнего случая представить в следующем (сокращенном) виде:

$$\begin{cases} \underline{Z}_a(\underline{I}_1+\underline{I}_2)-\underline{U}_0=\underline{E}_1+\underline{E}_2, \\ a^2\underline{Z}_b\underline{I}_1+a\underline{Z}_b\underline{I}_2-\underline{U}_0=a^2\underline{E}_1+a\underline{E}_2, \\ a\underline{Z}_c\underline{I}_1+a^2\underline{Z}_c\underline{I}_2-\underline{U}_0=a\underline{E}_1+a^2\underline{E}_2. \end{cases}$$

После подстановки численных значений эта система принимает вид:

$$\begin{cases} j\cdot\underline{I}_1+j\cdot\underline{I}_2-\underline{U}_0=-2{,}667-j1{,}333, \\ (-1{,}732+j)\cdot\underline{I}_1+(1{,}732+j)\cdot\underline{I}_2-\underline{U}_0=1{,}333+j0{,}667, \\ (-1{,}366+j0{,}366)\cdot\underline{I}_1+(0{,}366-j1{,}366)\cdot\underline{I}_2-\underline{U}_0=1{,}333+j0{,}667. \end{cases}$$

В результате решения получено

$$\underline{I}_1=-2{,}155-j0{,}577\ \text{А},\quad \underline{I}_2=0{,}155+j0{,}577\ \text{А},$$

$$\underline{U}_0=2{,}667-j0{,}667\ \text{В}.$$

Фазные токи определяются из выражений:

$$\underline{I}_A=\underline{I}_0+\underline{I}_1+\underline{I}_2=0+(-2{,}155-j0{,}577)+(0{,}155+j0{,}577)=-2\ \text{А},$$

$$\underline{I}_B=\underline{I}_0+a^2\underline{I}_1+a\underline{I}_2=0+e^{j240^\circ}\cdot(-2{,}155-j0{,}577)+$$

$$+e^{j120^\circ}\cdot(0{,}155+j0{,}577)=j2\ \text{А},$$

$$\underline{I}_C=\underline{I}_0+a\underline{I}_1+a^2\underline{I}_2=0+e^{j120^\circ}\cdot(-2{,}155-j0{,}577)+$$

$$+e^{j240^\circ}\cdot(0{,}155+j0{,}577)=2-j2\ \text{А}.$$

Ответ: $\underline{I}_A=2{,}853e^{j144{,}79^\circ}$ А, $\underline{I}_B=1{,}063e^{j82{,}67^\circ}$ А, $\underline{I}_C=1{,}431e^{-j46{,}74^\circ}$ А, $\underline{I}_A=-2$ А, $\underline{I}_B=-j2$ А, $\underline{I}_C=2-j2$ А.

Задача 8.7

Найти фазные и линейные токи при наличии взаимной индукции между фазами (рис.8.13), если: $U_Л = 200$ В, $R = 10$ Ом, $X_1 = X_2 = 10$ Ом, $X_M = 5$ Ом.

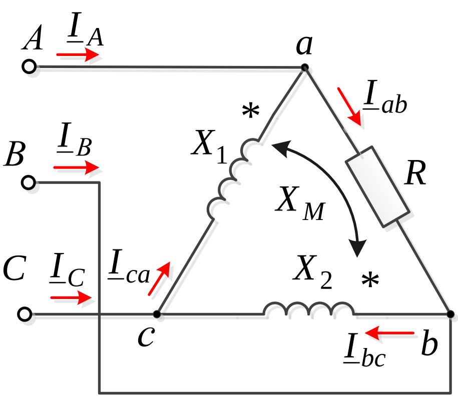


Рис. 8.13

Решение

По второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_{ab} R,$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_{bc} jX_2 - \underline{I}_{ca} jX_M,$$

$$\underline{U}_{ca} = I_{ca} jX_1 - I_{bc} jX_M.$$

Полагая

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = 200 \text{ В}, \ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = 200 e^{-j120°} \text{В},$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = 200 e^{j120°} \text{В},$$

и решая систему уравнений относительно фазных токов, получим

$$\underline{I}_{ab} = 20 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = -11{,}5 + j20 = 23 e^{j120°} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = 11{,}5 + j20 = 23 e^{j60°} \text{ А}.$$

Линейные токи в соответствии с первым законом Кирхгофа равны:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 20 - (11{,}5 + j20) = 8{,}5 - j20 = 21{,}73 e^{-j67°} \text{А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -11{,}5 + j20 - 20 = -31{,}5 + j20 = 37{,}3 e^{j147{,}5°} \text{А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 11{,}5 + j20 - (-11{,}5 + j20) = 23 \text{ А}.$$

Ответ: $\underline{I}_{ab} = 20$ А, $\underline{I}_{bc} = 23 e^{j120°}$ А, $\underline{I}_{ca} = 23 e^{j60°}$ А; $\underline{I}_A = 21{,}73 e^{-j67°}$ А, $\underline{I}_B = 37{,}3 e^{j147{,}5°}$ А, $\underline{I}_C = 23$ А.

Задача 8.8

Электродвижущая сила фазы A симметричного трехфазного генератора $e_A(t) = 120\sin\omega t + 20\sin(3\omega t + 30°) + 12\sin(5\omega t - 30°)$ В, нагрузка симметричная, сопротивление фазы нагрузки $\dfrac{1}{\omega C} = 30$ Ом.

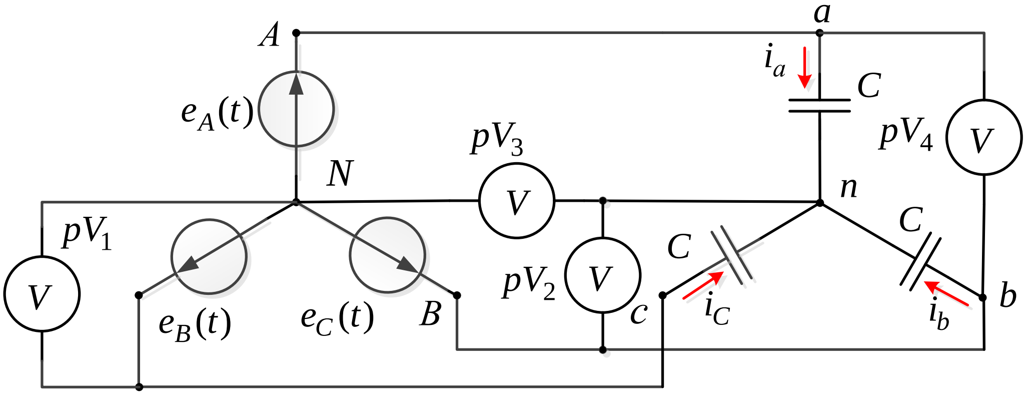


Рис. 8.14

Определить токи $i_a(t)$, $i_c(t)$ и показания электромагнитных вольтметров (рис. 8.14).

Ответ: $i_a(t) = 4\sin(\omega t + 90°) + 2\sin(5\omega t + 60°)$ А;
$i_c(t) = 4\sin(\omega t + 210°) + 2\sin(5\omega t - 60°)$ А; $pV_1 = 86{,}44$ В,
$pV_2 = 85{,}28$ В, $pV_3 = 14{,}14$ В, $pV_4 = 147{,}7$ В.

Задача 8.9

Трехфазный трансформатор, соединенный звездой, имеет $U_Ф = 127$ В. В две фазы трансформатора включены электронагреватели одинаковой мощности, а в третью фазу – осветительная лампа, мощность которой незначительна по сравнению с мощностью нагревателя. Определить:

а) под каким напряжением окажется лампа, если нулевой провод оборвется вблизи трансформатора;

б) под каким напряжением будет находиться вторая лампа, включенная между нейтралью нагрузки и землей, если нейтраль трансформатора заземлена.

Ответ: а) $U = 190{,}5$ В; б) $U = 63{,}5$ В.

Задача 8.10

Определить наибольшее и наименьшее значения напряжения, измеряемого вольтметром при изменении индуктивности L_1 от нуля до бесконечности, если $U_Ф$ = 220 В (рис. 8.15).

Ответ: pV_{max} = 380 В, pV_{min} = 190 В.

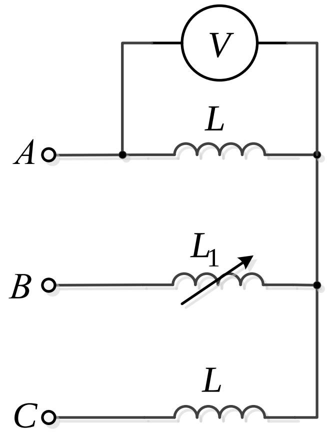


Рис. 8.15

Задача 8.11

Определить показания амперметров pA_B, pA_C, pA_0, если показания амперметра pA_A =10 А (рис. 8.16) и $R = X_L$ = 22 Ом.

Ответ: 10 А, 10 А, 14,14 А.

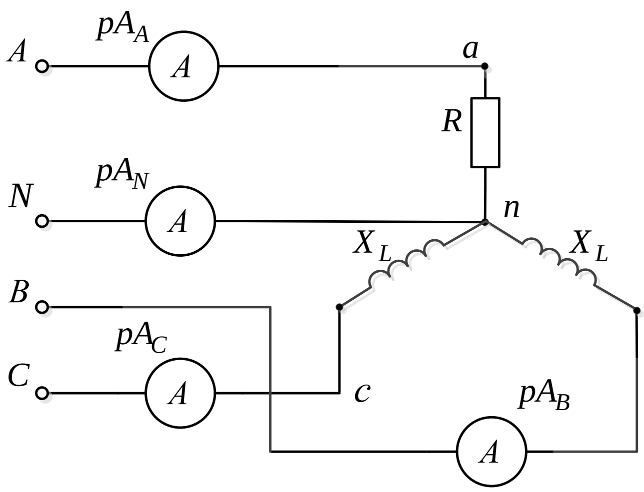


Рис. 8.16

Задача 8.12

Определить наибольшее и наименьшее значения напряжения, измеряемые вольтметром при изменении емкости от нуля до бесконечности (рис. 8.17), если $U_Л$ = 220 В.

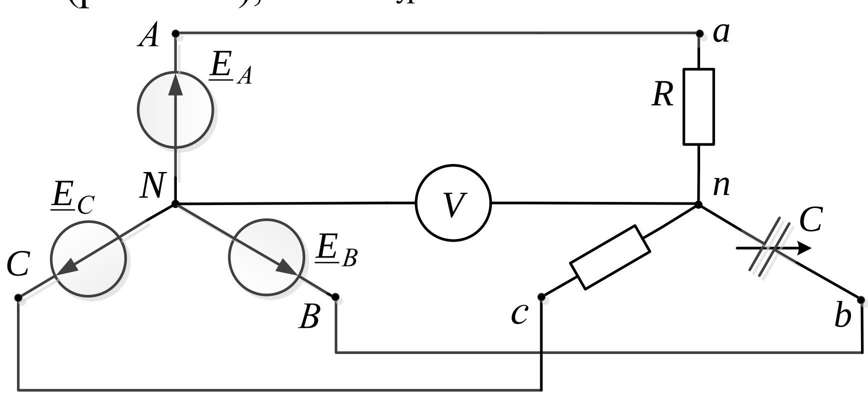


Рис. 8.17

Ответ: pV_{max} = 127 В; pV_{min} = 63,5 В.

Задача 8.13

Построить векторную диаграмму фазных токов и напряжений для трехфазной цепи, схема которой изображена на рис. 8.18.

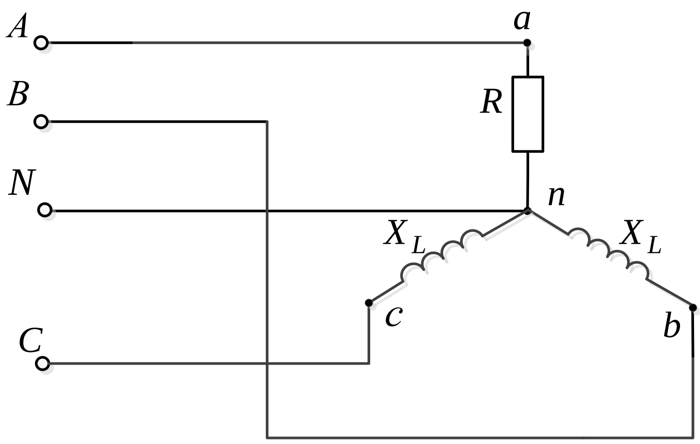


Рис. 8.18

Задача 8.14

Найти токи (рис. 8.19), если $R = 1/\omega C = \omega L = 2$ Ом, $U_Л = 20\sqrt{3}$ В.

Ответ: $\underline{I}_A = 13{,}65$ А;
$\underline{I}_B = -8{,}66 + j1{,}35$ А;
$\underline{I}_C = -8{,}66 - j1{,}35$ А;
$\underline{I}_N = -3{,}65$ А.

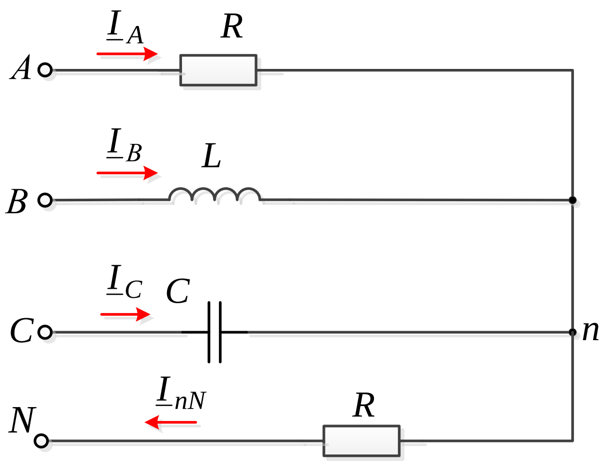


Рис. 8.19

Задача 8.15

К трехфазной линии с линейным напряжением 380 В присоединены звездой два приемника (рис. 8.20), причем $R = \omega L = 1/\omega C = 11$ Ом.

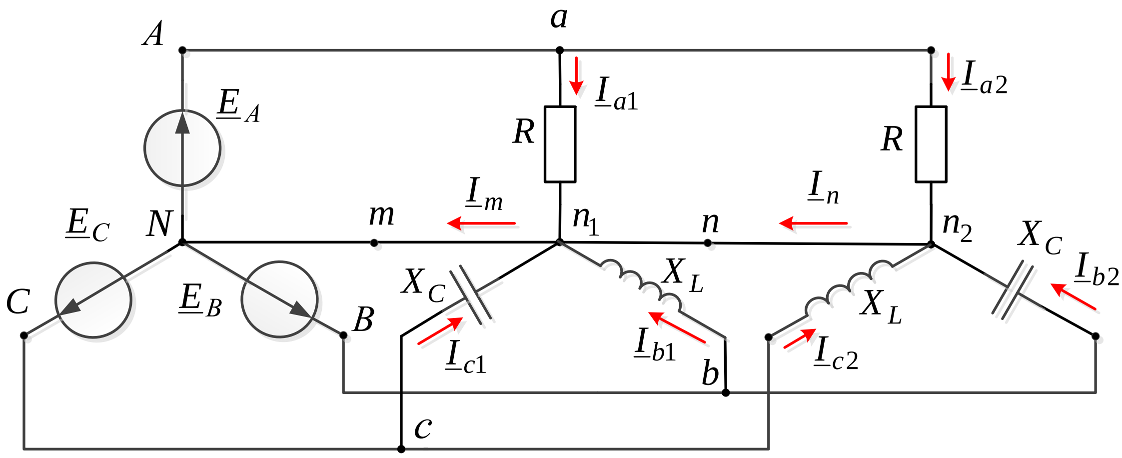


Рис. 8.20

Определить:

а) токи $\underline{I}_m$ и $\underline{I}_n$;

б) напряжения смещения нейтралей $\underline{U}_{n_1N}$ и $\underline{U}_{n_1N}$ и напряжения на нагрузках при обрыве нулевого провода в точках m и n одновременно.

Ответ: а) $\underline{I}_n = 54{,}6$ А, $\underline{I}_m = 40$ А; б) $\underline{U}_{n_1N} = -160$ В, $\underline{U}_{n_2N} = 600$ В; $\underline{U}_{a1} = 380$ В, $\underline{U}_{b1} = 197e^{-j75{,}3°}$ В, $\underline{U}_{c1} = 197e^{j75{,}3°}$ В; $\underline{U}_{a2} = 380$ В, $\underline{U}_{b2} = 735e^{-j165°}$, $\underline{U}_{c2} = 735e^{j165°}$ В.

Задача 8.16

ЭДС фазы A симметричного трехфазного генератора, соединенного звездой, $e_A(t)$ = 20sinωt + 5sin (3ωt − 20°) В. Нагрузка соединена звездой, причем в фазу a включено сопротивление R, в фазу b − индуктивность L , в фазу c − емкость C.

Определить ток в фазе a нагрузки и напряжение смещения нейтрали, если $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 2$ Ом.

Ответ: $i_a(t)$= 17,3sinωt А, $u_{nN}(t)$ = 14,6sin(ωt + 180°) +

+ 5sin(3ωt − 20°)В.

9. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

9.1. Краткие теоретические сведения

Разложение несинусоидальной функции в ряд Фурье

$$f(t) = A_0 + \sum_{1}^{\infty}\left(B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t\right) = A_0 + \sum_{1}^{\infty} A_{km}\sin\left(k\omega t + \varphi_k\right),$$

где $\quad A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\dfrac{C_{km}}{B_{km}};$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt; \quad B_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t dt;$$

$$C_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t dt.$$

Действующие значения несинусоидальных тока и напряжения

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \cdots}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \cdots}.$$

Мощности в цепи несинусоидального тока

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + \ldots;$$

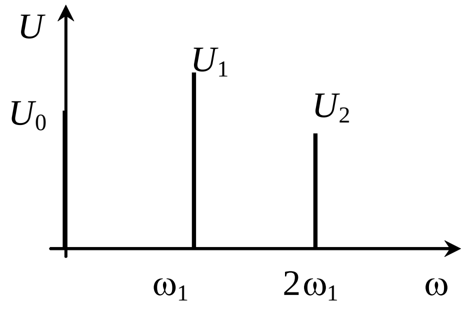
$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2 + \ldots;$$

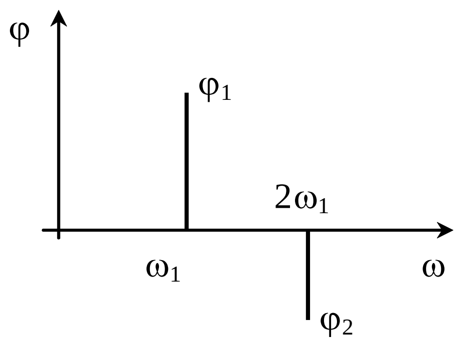
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2 + T_{\text{иск}}^2}.$$

Коэффициенты формы, амплитуды, искажений, гармоник

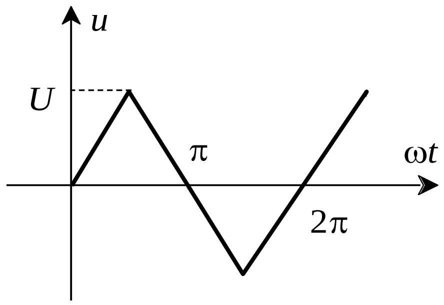
$$k_{\text{ф}} = \frac{I}{I_{\text{ср}}}; \qquad k_{\text{а}} = \frac{I_{\max}}{I}; \qquad k_{\text{и}} = \frac{I_1}{I}; \qquad k_{\text{г}} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}{I_1}.$$

Амплитудный и фазовый спектры несинусоидального напряжения





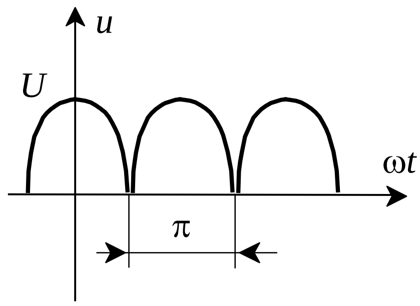
Симметрия относительно оси абсцисс



$u(\omega t) = -u(\omega t + \pi)$

Ряд не содержит четных гармоник и постоянной составляющей:
$u(\omega t) = A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) +$
$+ A_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + \ldots$

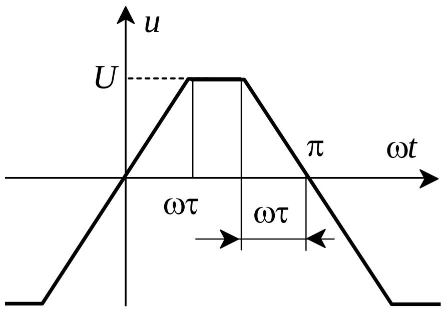
Симметрия относительно оси ординат



$u(\omega t) = u(-\omega t)$

Ряд не содержит синусных составляющих:
$u(\omega t) = A_0 + A_{1m}\cos\omega t +$
$+ A_{2m}\cos 2\omega t +$
$+ A_{3m}\cos 3\omega t + \ldots$

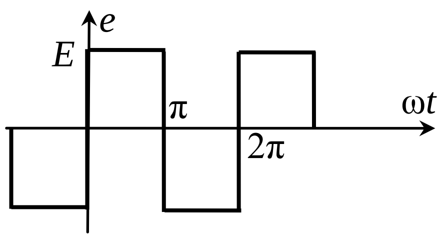
Симметрия относительно начала координат



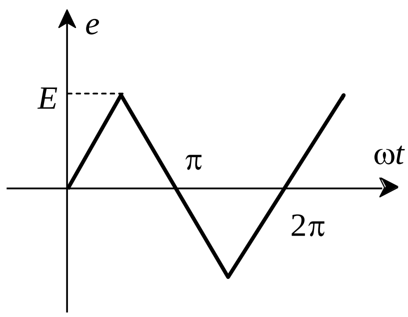
$u(\omega t) = -u(-\omega t)$

Ряд не содержит косинусных и постоянной составляющих:
$u(\omega t) = A_{1m}\sin\omega t +$
$+ A_{2m}\sin 2\omega t +$
$+ A_{3m}\sin 3\omega t + \ldots$

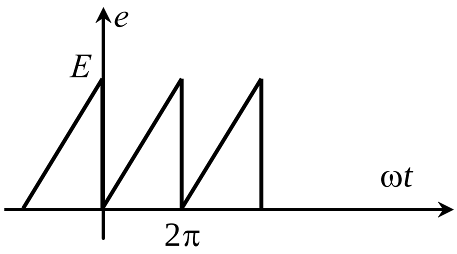
Разложение в ряд Фурье некоторых периодических функций



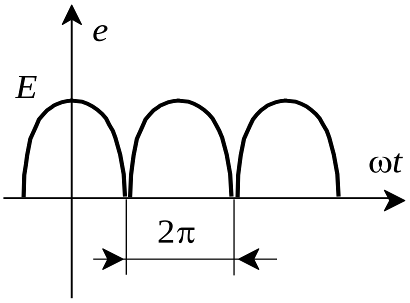
$$e(\omega t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right) =$$
$$= \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}$$



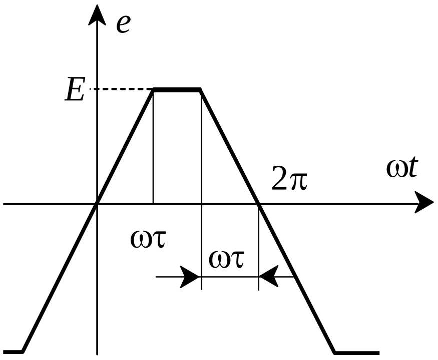
$$e(\omega t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sum_{k=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{\sin k\omega t}{k^2}\right]$$



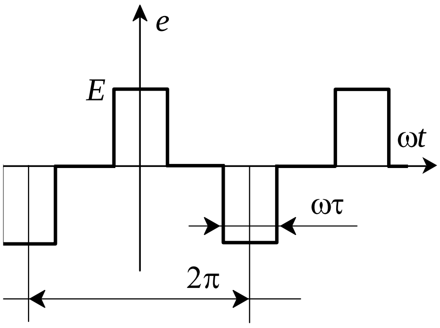
$$e(\omega t)=E\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\omega t\right)$$



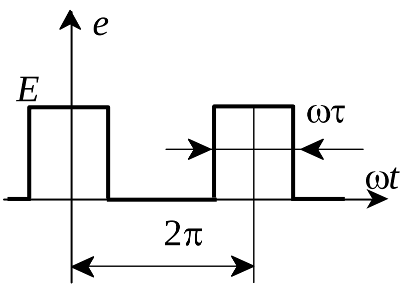
$$e(\omega t)=\frac{4E}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)^2-1}\cos 2k\omega t\right]$$



$$e(\omega t)=\frac{4E}{\omega\tau\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\omega\tau\cdot sin(2k-1)\omega t}{k^2}$$



$$e(\omega t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\omega\tau}{2}\cos k\omega t$$



$$e(\omega t)=E\left(\frac{\tau}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\omega\tau}{2}\cos k\omega t\right)$$

9.2. Примеры и задачи

Задача 9.1

На входе цепи (рис. 9.1) задано напряжение $u_{вх}(t)$, показанное на графике рис. 9.2. Найти действующее значение напряжения U_2, ограничиваясь первыми тремя членами ряда при разложении $u_{вх}(t)$ в ряд Фурье, если $U_m = 200$ В; $1/\omega C = 100$ Ом; $R = 50$ Ом.

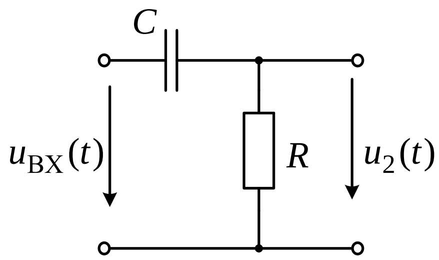


Рис. 9.1

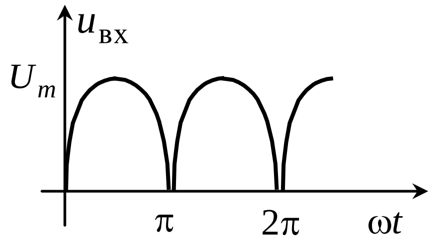


Рис. 9.2

Решение

Известно разложение в ряд Фурье для напряжения (рис. 9.3)

$$u(t)=\frac{4U_m}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\cos 4\omega t+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{35}\cos 6\omega t-...\right].$$

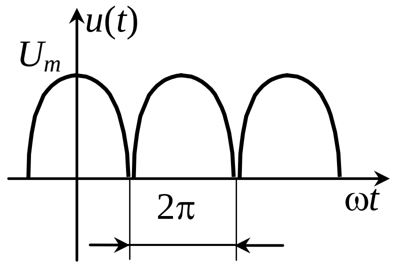


Рис. 9.3

Заданное напряжение $u_{вх}(t)$ запаздывает по времени на $T/4$ по отношению к напряжению, приведенному на рис. 9.3, поэтому

$$u_{вх}(t)=\frac{4U_m}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos 2\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)-\frac{1}{15}\cos 4\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)+\frac{1}{35}\cos 6\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{4U_m}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos 2\omega t-\frac{1}{15}\cos 4\omega t-\frac{1}{35}\cos 6\omega t-...\right]=$$
$$=\frac{4U_m}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{15}\sin\left(4\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{35}\sin\left(6\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right].$$

Заметим, что кривая $u_{вх}(t)$ симметрична относительно оси ординат, т. е. выполняется условие $[f(t)=f(-t)]$, и поэтому ряд Фурье содержит только косинусные и постоянную составляющие.

Проведем расчет выходного напряжения для каждой составляющей:

1) *постоянная составляющая*:

емкостное сопротивление для постоянной составляющей входного напряжения $1/\omega C$ бесконечно велико ($\omega = 0$), и поэтому выходное напряжение $U_{2(0)} = 0$ (рис. 9.4);

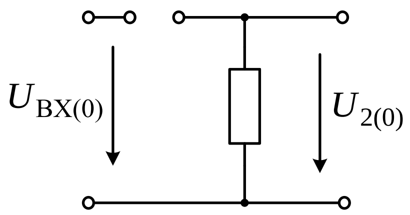


Рис. 9.4

2) *вторая гармоника* (2ω) (рис. 9.5):

комплекс выходного напряжения равен

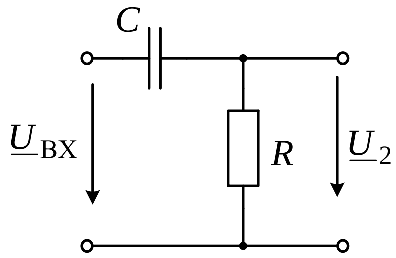


Рис. 9.5

$$\underline{U}_{2(2)} = \frac{\underline{U}_{вх}}{R - j\dfrac{1}{2\omega C}} R \ ,$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\dfrac{1}{\omega C} = 100$ Ом, $\dfrac{1}{2\omega C} = 50$ Ом,

$$\underline{U}_{вх(2)} = U_{вх(2)} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{4U_m}{3\pi\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{-j4 \cdot 200}{3\pi\sqrt{2}} = -j60 \ \text{В}.$$

Тогда $\quad \underline{U}_{2(2)} = \dfrac{\underline{U}_{вх(2)}}{R - jX_{C(2)}} R = \dfrac{-j60 \cdot 50}{50 - j50} = \dfrac{60 e^{-j90^\circ}}{\sqrt{2} e^{-j45^\circ}} = 42{,}4 \cdot e^{-j45^\circ}$ В,

а мгновенное значение выходного напряжения для второй гармоники

$$u_2(2\omega t) = 60 \sin(2\omega t - 45^\circ) \ \text{В};$$

3) *четвертая гармоника* (4ω):

если $\quad \underline{U}_{вх(4)} = \dfrac{-j4U_m}{15\pi\sqrt{2}} = \dfrac{-j4 \cdot 200}{15\pi\sqrt{2}} = -j12$ В,

то $\quad \underline{U}_{2(4)} = \dfrac{\underline{U}_{вх(4)} R}{R - j\dfrac{1}{4\omega C}} = \dfrac{-j12 \cdot 50}{50 - j25} = 10{,}7 e^{-j63{,}4^\circ}$ В.

Мгновенное значение выходного напряжения для четвертой гармоники:

$$u_2(4\omega t) = 15{,}1 \sin(4\omega t - 63{,}4^\circ) \ \text{В};$$

4) *шестая гармоника* (6ω):

если $\underline{U}_{\text{вх}(6)} = \dfrac{-j4 \cdot U_m}{35\pi\sqrt{2}} = \dfrac{-4 \cdot 200j}{35\pi\sqrt{2}} = -j5{,}16$ В,

то $$\underline{U}_{2(6)} = \dfrac{\underline{U}_{\text{вх}(6)} R}{R - j\dfrac{1}{6\omega C}} = \dfrac{(-5{,}16j) \cdot 50}{50 - j100/6} = 4{,}89e^{-j71{,}5^\circ}\ \text{В}.$$

Мгновенное значение выходного напряжения для шестой гармоники:

$$u_2(6\omega t) = 6{,}9\sin(6\omega t - 71{,}5^\circ)\ \text{В}.$$

Согласно принципу наложения выходное напряжение выражается суммой выходных напряжений, найденных для каждой гармонической составляющей:

$$u_2(t) = 60\sin(2\omega t - 45^\circ) + 15{,}1\sin(4\omega t - 63{,}4^\circ) + 6.9\sin(6\omega t - 71{,}5^\circ)\text{В}.$$

Действующее значение выходного напряжения:

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{U_{2m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{2m(4)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{2m(6)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15{,}1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{6{,}9}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$
$$= 44{,}03\ \text{В}.$$

Ответ: $U_2 = 44{,}03$ В.

Задача 9.2

На вход цепи (рис. 9.6) приложено напряжение

$$u(t) = 10 + 40\sin\omega t + 20\sin(2\omega t - 45^\circ)\ \text{В}.$$

Определить $i(t)$, если

ωL_1=20 О $1/\omega C_1$= 20 Ом; ωL_2= 10 Ом;
$1/\omega C_2$ = 40 Ом; R = 10 Ом.

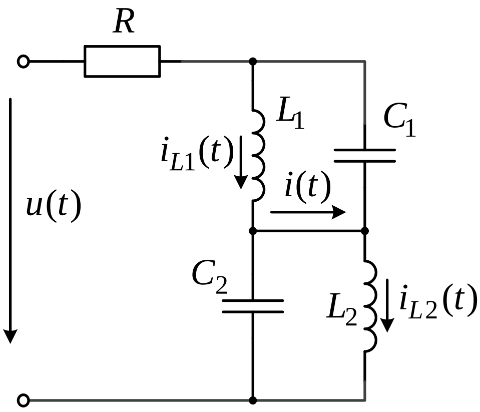


Рис. 9.6

Решение

1) *постоянная составляющая тока:*

$$I_0 = U_0/R = 10/10 = 1\ \text{А};$$

2) *первая гармоника* (ω):

при частоте ω параллельный контур L_1C_1 настроен в резонанс, т. к. $\omega L_1 = 1/\omega C_1$. Его сопротивление бесконечно велико. Входное напряжение первой гармоники будет приложено к зажимам этого контура. Ток в индуктивности L_1:

$$\underline{I}_{L(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{j\omega L_1} = \frac{40/\sqrt{2}}{j20} = -j\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ А.}$$

Токи через резистор R и во втором контуре L_2C_2 равны нулю.

Поэтому по первому закону Кирхгофа искомый ток равен току в ветви с индуктивностью L_1:

$$i_{(1)}(\omega t) = i_{L1(1)}(\omega t) = 2\sin(\omega t - 90°) \text{ А;}$$

3) *вторая гармоника* (2ω):

при частоте 2ω параллельный контур L_2C_2 настроен в резонанс, т. к. $2\omega L_2 = 1/2\omega C_2$, его сопротивление бесконечно велико и входное напряжение второй гармоники приложено к зажимам этого контура.

Ток в ветви с индуктивностью L_2:

$$\underline{I}_{L2(2)} = \frac{\underline{U}_{(2)}}{j2\omega L_2} = \frac{20\cdot e^{-45°}/\sqrt{2}}{j20} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j135°} \text{ А.}$$

Ток в ветви с емкостью C_1 равен нулю, и по первому закону Кирхгофа:

$$i_{(2)}(2\omega t) = i_{L2(2)}(2\omega t) = 1\sin(2\omega t - 135°) \text{ А.}$$

Складывая гармонические составляющие, получим искомый ток

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(\omega t) + i_{(2)}(2\omega t) = 1 + 2\sin(\omega t - 90°) + 1\sin(2\omega t - 135°) \text{ А.}$$

Ответ: $i(t) = 1 + 2\sin(\omega t - 90°) + 1\sin(2\omega t - 135°)$ А.

Задача 9.3

В цепи (рис. 9.7), где $\omega L_B = 30$ Ом, $\omega L_C = 10$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 40$ Ом, $R = 60$ Ом, действуют две ЭДС:

$e_A = 60 + 30\sin(\omega t + 30°) + 60\sin 2\omega t$ В;

$e_B = 30$ В.

Найти мгновенные и действующие значения токов в ветвях и напряжения на емкости, а также мощность в сопротивлении R. Определить активную и полную мощности источника ЭДС e_A.

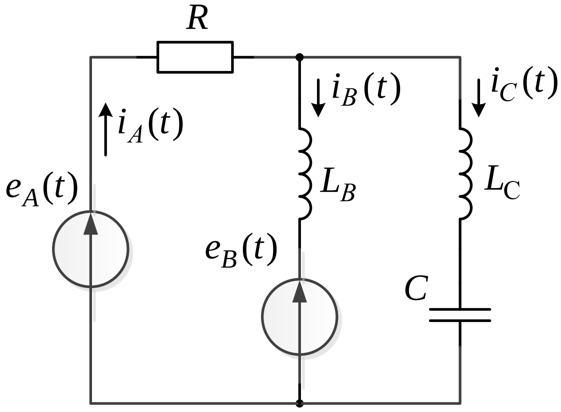


Рис. 9.7

Решение

Постоянные составляющие токов и напряжения на емкости:

$I_{A0} = I_{B0} = (E_{A0} - e_B)/R = (60 – 30) / 60 = 0{,}5$ А; $I_{C0} = 0$; $U_{C0} = e_B = 30$ В.

Для *первой гармоники* входное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{(1)} = R + \frac{j\omega L_B(j\omega L_C - j\,1/\omega C)}{j\omega L_B + j\omega L_C - j\,1/\omega C} = R + \infty = \infty,$$

в правом контуре наблюдается резонанс токов. Тогда:

$$\underline{I}_{Am(1)} = 0;$$

$$\underline{I}_{Bm(1)} = \frac{\underline{E}_{Am(1)}}{j\omega L_B} = \frac{30e^{j30^\circ}}{j30} = 1e^{-j60^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{Cm(1)} = \frac{\underline{E}_{Am(1)}}{\left(j\omega L_C - j\,1/\omega C\right)} = \frac{30e^{j30^\circ}}{j10 - j40} = 1e^{j120^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{Cm(1)} = \underline{I}_{Cm(1)} \cdot \left(-j\,1/\omega C\right) = e^{j120^\circ} \cdot (-j40) = 40e^{j30^\circ} \text{ В}.$$

Для *второй гармоники* сопротивление ветви *c* будет равно:

$$\underline{Z}_{C(2)} = j2\omega L_C - j/2\omega C = j20 - j20 = 0,$$

наблюдается резонанс напряжений. Поэтому входное сопротивление цепи для второй гармоники $\underline{Z}_{(2)} = R = 60$ Ом.

Тогда $\underline{I}_{Am(2)} = \underline{E}_{Am(2)}/\underline{Z}_{(2)} = 60/60 = 1$ А;

$$\underline{I}_{Cm(2)} = \underline{I}_{Am(2)};$$

$$\underline{I}_{Bm(2)} = 0;$$

$$\underline{U}_{Cm(2)} = \underline{I}_{Cm(2)} \cdot \left(-j\,1/2\omega C\right) = -j20 \text{ В}.$$

Мгновенные и действующие значения токов в ветвях и напряжения на емкости, соответственно, равны:

$$i_A(t) = 0{,}5 + 1\sin 2\omega t \text{ А};$$

$$I_A = \sqrt{I_{A(0)}^2 + \left(\frac{I_{Am(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0{,}5^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0{,}87 \text{ А};$$

$$i_B(\mathrm{t}) = 0{,}5 + 1\sin(\omega t - 60^\circ) \text{ А};$$

$$I_B = \sqrt{I_{B(0)}^2 + (\frac{I_{Bm(2)}}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{0{,}5^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 0{,}87 \text{ А};$$

$$i_C(t) = 1\sin(\omega t + 120°) + 1\sin 2\omega t \text{ А};$$

$$I_C = \sqrt{(\frac{I_{Cm(2)}}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{I_{Cm(2)}}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1 \text{ А};$$

$$u_C(t) = 30 + 40\sin(\omega t + 30°) + 20\sin(2\omega t - 90°) \text{ В};$$

$$U_C = \sqrt{U_{C(0)}^2 + (\frac{U_{Cm(2)}}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{U_{Cm(2)}}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{(30)^2 + (\frac{40}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{20}{\sqrt{2}})^2} = 43{,}5 \text{ В}.$$

Активная мощность в сопротивлении R:

$$P_A = I_A^2 \cdot R = 0{,}87^2 \cdot 60 = 45 \text{ Вт}.$$

Мощности источника ЭДС e_A:

активная $P_e = I_{A0} \cdot E_{A0} + I_{A2} \cdot E_{A(2)} = 0{,}5 \cdot 60 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{60}{\sqrt{2}} = 60$ Вт;

полная $S_e = I_A \cdot E_A = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2} \cdot \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2} =$

$$= 0{,}87\sqrt{60^2 + (\frac{30}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{60}{\sqrt{2}})^2} = 66{,}54 \text{ ВА}.$$

Ответ: $i_A(t) = 0{,}5 + 1\sin 2\omega t$ А; $i_B(\text{t}) = 0{,}5 + 1\sin(\omega t - 60°)$ А; $i_C(t) = 1\sin(\omega t + 120°) + 1\sin 2\omega t$ А; $I_A = 0{,}87$ А; $I_B = 0{,}87$ А; $I_C = 1$ А; $P_A = 45$ Вт; $P_e = 60$ Вт; $S_e = 66{,}54$ ВА.

Задача 9.4

Определить показания электродинамических амперметра A и вольтметра V и электромагнитного ваттметра W (рис. 9.8), если

$u_{вх}(t) = 20 + 100\sin\omega t + 20\sin 5\omega t$ В,

$R = 10$ Ом, $\omega L = 2$ Ом,

$$\frac{1}{\omega C} = 50 \text{ Ом}.$$

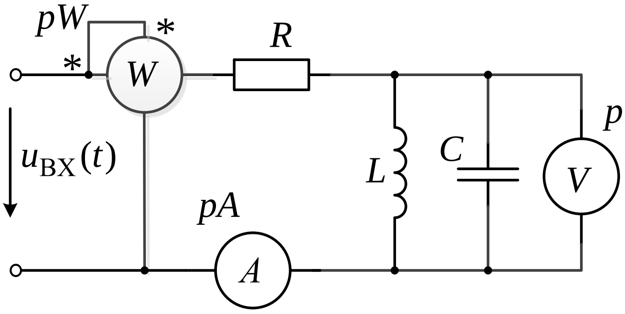


Рис. 9.8

Решение

Рассчитаем составляющие тока через амперметр и напряжения на вольтметре.

Постоянная составляющая:

$$I_{(0)} = U_{\text{вх}(0)}/R = 20/10 = 2\ \text{А};\ U_{2(0)} = 0.$$

Первая гармоника:

$$\underline{Z}_{(1)} = R + \frac{j\omega L(-j/\omega C)}{j\omega L - j/\omega C} = 10 + \frac{j2(-j50)}{j2 - j50} = 10 + j2{,}1 = 10{,}2e^{j12^\circ}\ \text{Ом},$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \underline{U}_{\text{вх}m(1)} / \underline{Z}_{(1)} = \frac{100}{10{,}2e^{j12^\circ}} = 9{,}78e^{-j12^\circ}\ \text{А},$$

$$\underline{U}_{Vm(1)} = \underline{I}_{m(1)} \frac{j\omega L(-j/\omega C)}{j\omega L - j/\omega C} = 9{,}78e^{-j12^\circ}\ \frac{j2(-j50)}{j2 - j50} = 20{,}38e^{j78^\circ}\ \text{В}.$$

Пятая гармоника:

$$\underline{Z}_{(5)} = R + \frac{j5\omega L(-j/5\omega C)}{j5\omega L - j/5\omega C} = 10 + \frac{j10(-j10)}{j10 - j10} = \infty,$$

$$\underline{I}_{m(5)} = 0;\ \underline{U}_{2m(5)} = \underline{U}_{\text{вх}m(5)} = 20\ \text{В}.$$

Мгновенное значение тока через амперметр

$$i(t) = 2 + 9{,}78\sin(\omega t - 12^\circ)\ \text{А}.$$

Показание электродинамического амперметра, реагирующего на действующее значение периодического тока, равно

$$I_a = \sqrt{I_{(0)}^2 + \left(\frac{I_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{9{,}78}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7{,}2\ \text{А}.$$

Мгновенное значение напряжения на зажимах вольтметра равно:

$$u_V(t) = 20{,}38\sin(\omega t + 78^\circ) + 20\sin 5\omega t\ \text{В},$$

и показание электродинамического вольтметра, реагирующего на действующее значение периодического напряжения:

$$U_V = \sqrt{\left(\frac{U_{Vm(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{Vm(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20{,}38}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2} = 20{,}19\ \text{В}.$$

Показание ваттметра (средняя мощность за период):

$$P_w = RI_0^2 + RI_1^2 + RI_5^2 = 10\left[2^2 + \left(\frac{9{,}78}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = 518{,}24\ \text{Вт}.$$

Ответ: $pA = 7{,}2$ А, $pV = 20{,}19$ В, $pW = 518{,}24$ Вт.

Задача 9.5

Сигнал на выходе источника периодического несинусоидального напряжения имеет форму, приведенную на рис. 9.9.

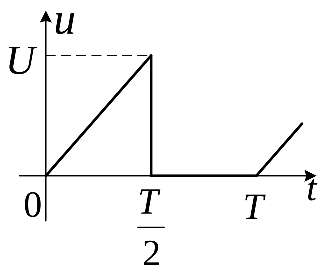


Рис. 9.9

$$u(t)=\begin{cases}2\dfrac{U}{T}\cdot t \text{ при } 0<t<\dfrac{T}{2},\\ 0 \text{ при } \dfrac{T}{2}<t<T,\end{cases}$$

где $U=100$ В; $T=0{,}01$ с.

Найти мгновенное и действующее значения напряжения цепи, при его замене приближенным напряжением с учетом четырех членов ряда Фурье, коэффициент гармоник и коэффициент искажений и построить график напряжения с учетом четырех гармоник.

Решение

Разложим периодическую функцию напряжения $u(t)$ в ряд Фурье:

$$u(t)=U_{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}U_{m(k)}(t)\sin(k\omega t+\psi_{(k)}).$$

Постоянная составляющая ряда Фурье равна

$$U_{(0)}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{2U\cdot t}{T}\right)dt=\frac{U}{4}=\frac{100}{4}=25 \text{ В.}$$

Для определения амплитуды $U_{m(k)}$ и начальной фазы $\psi_{(k)}$ k-й гармоники вначале получаем выражения для коэффициентов B_k и C_k:

$$B_k=\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(k\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{2U\cdot t}{T}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt=-U\,\frac{\cos k\pi}{k\pi},$$

$$C_k=\frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(k\omega t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{2U\cdot t}{T}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt=-U\,\frac{1-\cos k\pi}{(k\pi)^2}.$$

Далее для k-й гармоники частоты $k\omega$ находим

$$U_{m(k)}=\sqrt{B_k^2+C_k^2},$$

$$\psi_{(k)} = \operatorname{arctg}\frac{C_k}{B_k} \quad \text{при } B_k > 0 \quad \text{и} \quad \psi_{(k)} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{C_k}{B_k} \quad \text{при } B_k < 0.$$

Результаты этих вычислений для нескольких гармоник сведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Номер гармоники (k)	B_k (Вольт)	C_k (Вольт)	$U_{m(k)}$ (Вольт)	$\psi_{(k)}$ (град.)
0	–	–	25	–
1	31,8	–20,3	37,7	–32,5
2	–15,9	0	15,9	180
3	10,6	–2,25	10,8	–12

В соответствии с условием задачи заданное напряжение $u(t)$ приближенно заменяем напряжением $u'(t)$ с учетом четырех членов ряда Фурье:

$$u'(t) \approx U_0 + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} =$$

$$= 25 + 37{,}7\sin(\omega t - 32{,}5^\circ) + 15{,}9\sin(2\omega t + 180^\circ) + 10{,}8\sin(3\omega t - 12^\circ) \text{ В.}$$

График этой функции представлен на рис. 9.10. Несмотря на то, что представленная кривая незначительно отличается от графика на рис. 9.9, форма графика сохранена.

Рис. 9.10

Действующее значение несинусоидального напряжения можно определить, пользуясь графиком (рис. 9.9):

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2dt}=\sqrt{\frac{4U_{mm}^2}{T^3}\int_0^{T/2} t^2dt}=\frac{U_{mm}}{\sqrt{6}}=40{,}8\ \text{В}.$$

Действующее значение приближенного напряжения $u'(t)$:

$$U'=\sqrt{U_{(0)}^2+\frac{U_{m(1)}^2+U_{m(2)}^2+U_{m(3)}^2}{2}}=\sqrt{25^2+\frac{37{,}7^2+15{,}9^2+10{,}8^2}{2}}=38{,}9\ \text{В}.$$

Таким образом, относительная погрешность, связанная с пренебрежением высшими гармониками входного напряжения, начиная с четвертой, составляет:

$$\Delta U=\frac{U'-U}{U}100\%=\frac{38{,}9-40{,}8}{40{,}8}\cdot 100\%=-4{,}7\%.$$

В электронике и радиотехнике для оценки искажения кривой (в смысле ее *отклонения* от синусоиды) пользуются рядом коэффициентов, в частности *коэффициентом гармоник* $k_\text{г}$, равным отношению действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники, и *коэффициентом искажений* $k_\text{и}$, равным отношению действующего значения основной гармоники к действующему значению несинусоидального сигнала.

В нашем случае коэффициент гармоник кривой приближенного напряжения равен

$$k_\text{г}=\frac{1}{U_{(1)}}\sqrt{\sum_{k=2,3...}U_{(k)}^2}=\frac{\sqrt{U_{(2)}^2+U_{(3)}^2}}{U_{(1)}}=\frac{\sqrt{15{,}9^2+10{,}8^2}}{37{,}7}=0{,}51,$$

а коэффициент искажений

$$k_\text{и}=\frac{U_{(1)}}{U'}=\frac{37{,}7}{38{,}9}=0{,}969.$$

Для сравнения приведем график этого же напряжения, если в ряде Фурье учтены 10 гармонических составляющих (рис. 9.11). Здесь форма сигнала и его максимальное значение еще ближе к сигналу на рис. 9.9.

Однако в большинстве случаев приемлемым компромиссом между точностью и трудоемкостью расчетов является учет 3–4 членов ряда Фурье.

Сумма десяти гармоник

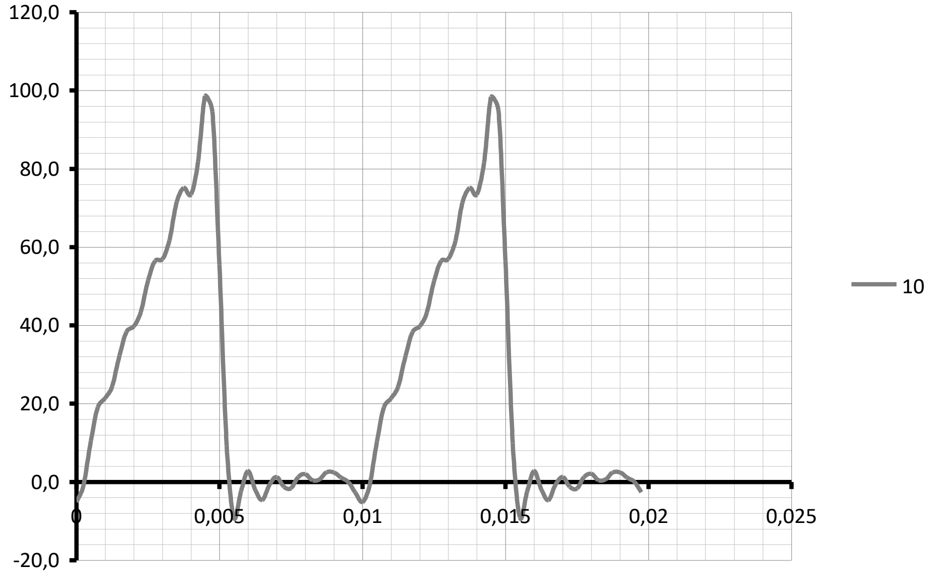


Рис. 9.11

Ответ: $U' = 38{,}9$ В; $k_{\text{г}} = 0{,}51$; $k_{\text{и}} = 0{,}969$;
$u'(t) = 25 + 37{,}7\sin(\omega t - 32{,}5^{\circ}) + 15{,}9\sin(2\omega t + 180^{\circ}) + 10{,}8\sin(3\omega t - 12^{\circ})$ В.

Задача 9.6

На входе цепи (рис. 9.12) действует периодическое несинусоидальное напряжение (рис. 9.13).

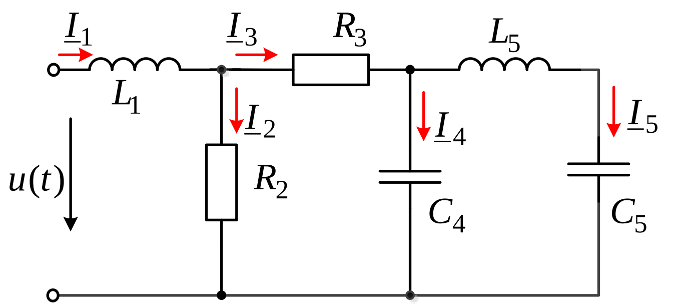


Рис. 9.12

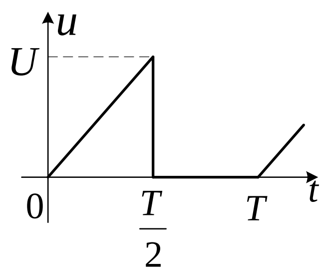


Рис. 9.13

Дано: $U = 100$ В, $T = 0{,}01$ с, $R_2 = R_3 = 24$ Ом. Значения индуктивных и емкостных сопротивлений на частоте $\omega = \frac{2\pi}{T}$ равны: $\omega L_1 = 4$ Ом, $\frac{1}{\omega C_4} = 90$ Ом, $\omega_1 L_5 = \frac{1}{\omega C_5} = 30$ Ом.

Найти мгновенное и действующее значения входного тока, если входное напряжение представить рядом Фурье, ограничившись первыми четырьмя составляющими, а также коэффициент мощности.

Решение

Воспользуемся полученным в предыдущей задаче результатом разложения входного напряжения в ряд Фурье:

$$u'(t) = 25 + 37,7\sin(\omega t - 32,5^\circ) + 15,9\sin(2\omega t + 180^\circ) + 10,8\sin(3\omega t - 12^\circ) \text{ В.}$$

Проведем расчет входного тока для каждой составляющей:

1) *постоянная составляющая:* определение входного тока при действии на входе цепи постоянного напряжения, равного $U_{(0)} = 25$ В.

Очевидно, постоянный ток в цепи может замыкаться лишь по первой и второй ветвям, т. к. четвертая и пятая ветви, содержащие конденсаторы, постоянный ток не проводят. Поскольку сопротивление катушки L_1 при постоянном токе равно нулю, то

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_2} = \frac{25}{24} = 1{,}04 \text{ А.}$$

Мощность, потребляемая от постоянной составляющей напряжения:

$$P_{(0)} = U_{(0)} I_{1(0)} = 25 \cdot 1{,}04 = 26 \text{ Вт;}$$

2) *первая гармоника* (ω): определение реакции цепи от воздействия первой гармоники напряжения:

$$u_{(1)}(t) = 37,7\sin(\omega t - 32,5^\circ) \text{ В}, \qquad \underline{U}_{(1)} = \frac{37,7}{\sqrt{2}} e^{-j32,5^\circ} \text{В.}$$

Реактивные сопротивления ветвей на частоте ω даны в условии задачи, поэтому:

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 = j4 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R_3 = 24 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_4 = -\frac{j}{\omega C_4} = -j90 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = j\omega L_5 - \frac{j}{\omega C_5} = j30 - j30 = 0.$$

Для эквивалентных сопротивлений получаем:

$$\underline{Z}_{345} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 24 + \frac{-j90 \cdot 0}{-j90 + 0} = 24 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2345} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \frac{24 \cdot 24}{24 + 24} = 12 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_Э = \underline{Z}_{2345} + \underline{Z}_1 = 12 + j4 = 12{,}6e^{j18{,}4^\circ} \text{ Ом}.$$

Найдем комплекс входного тока и его мгновенное значение:

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{\underline{Z}_Э} = \frac{\frac{37{,}7}{\sqrt{2}} e^{-j32{,}5^\circ}}{12{,}6e^{j18{,}4^\circ}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-j50{,}9^\circ} \text{ А}, \qquad i_{1(1)} = 3\sin(\omega t - 50{,}9^\circ) \text{ А}.$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\underline{U}_{(1)}$ и входного тока $\underline{I}_{1(1)}$ на частоте первой гармоники равен

$$\varphi_{(1)} = \psi_{u_{(1)}} - \psi_{i_{1(1)}} = (-32{,}5^\circ) - (-50{,}9^\circ) = 18{,}4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте первой гармоники напряжения

$$P_{(1)} = U_{(1)} I_{1(1)} \cos\varphi_{(1)} = \frac{37{,}7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cos 18{,}4^\circ = 53{,}65 \text{ Вт}.$$

3) *вторая гармоника* (2ω): определение реакции цепи от воздействия второй гармоники напряжения

$$u_{(2)}(t) = 15{,}9\sin(2\omega t + 180^\circ)\text{В}, \qquad \underline{U}_{(2)} = \frac{15{,}9}{\sqrt{2}} e^{j180^\circ} \text{ В}.$$

При пересчете комплексных сопротивлений ветвей на частоту 2ω получаем:

$$\underline{Z}_1 = j2\omega L_1 = j8 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R_3 = 24 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_4 = -\frac{j}{2\omega C_4} = -j45 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = j2\omega L_5 - \frac{j}{2\omega C_5} = j60 - j15 = j45 \text{ Ом}.$$

Для эквивалентных сопротивлений имеем:

$$\underline{Z}_{345} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 24 + \frac{-j45 \cdot j45}{-j45 + j45} = \infty,$$

$$\underline{Z}_{2345} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \frac{24 \cdot \infty}{24 + \infty} = 24 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_Э = \underline{Z}_{2345} + \underline{Z}_1 = 24 + j8 = 25{,}3e^{j18{,}4^\circ} \text{Ом}.$$

Входной ток:

$$\underline{I}_{1(2)} = \frac{\underline{U}_{(2)}}{\underline{Z}_Э} = \frac{\frac{15{,}9}{\sqrt{2}} e^{j180^\circ}}{25{,}3 e^{j18{,}4^\circ}} = \frac{0{,}628}{\sqrt{2}} e^{j161{,}6^\circ} \text{ A},$$

$$i_{1(2)} = 0{,}628 \sin(2\omega t + 161{,}6^\circ) \text{ A}.$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\underline{U}_{(2)}$ и входного тока $\underline{I}_{1(2)}$ на частоте второй гармоники равен

$$\varphi_{(2)} = \psi_{u_{(2)}} - \psi_{i_{1(2)}} = 180^\circ - 161{,}6^\circ = 18{,}4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте второй гармоники напряжения

$$P_{(2)} = U_{(2)} I_{1(2)} \cos\varphi_{(2)} = \frac{15{,}9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}628}{\sqrt{2}} \cos 18{,}4^\circ = 4{,}737 \text{ Вт};$$

4) *третья гармоника* (3ω): определение реакции цепи от воздействия третьей гармоники напряжения:

$$u_{(3)}(t) = 10{,}8 \sin(3\omega t - 12^\circ) \text{ В}, \qquad \underline{U}_{(3)} = \frac{10{,}8}{\sqrt{2}} e^{-j12^\circ} \text{ В}.$$

При пересчете комплексных сопротивлений ветвей на частоту 3ω, получаем:

$$\underline{Z}_1 = j3\omega L_1 = j12 \text{ Ом}, \qquad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R_3 = 24 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = -\frac{j}{3\omega C_4} = -j30 \text{ Ом}, \qquad \underline{Z}_5 = j3\omega L_5 - \frac{j}{3\omega C_5} = j90 - j10 = j80 \text{ Ом}.$$

Для эквивалентных сопротивлений имеем:

$$\underline{Z}_{345} = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = 24 + \frac{-j30 \cdot j80}{-j30 + j80} = 24 - j48 = 53{,}67 e^{-j63{,}4^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2345} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \frac{24 \cdot (24 - j48)}{24 + 24 - j48} = 18 - j6 = 19 e^{-j18{,}4^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_Э = \underline{Z}_{2345} + \underline{Z}_1 = 18 - j6 + j12 = 18 + j6 = 19 e^{j18{,}4^\circ} \text{ Ом}.$$

Входной ток:

$$\underline{I}_{1(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{\underline{Z}_Э} = \frac{\frac{10{,}8}{\sqrt{2}} e^{-j12^\circ}}{19 e^{j18{,}4^\circ}} = \frac{0{,}568}{\sqrt{2}} e^{-j30{,}4^\circ} \text{ A},$$

$$i_{1(3)} = 0{,}568 \sin(3\omega t - 30{,}4^\circ) \text{ A}.$$

Сдвиг между фазами входного напряжения $\underline{U}_{(3)}$ и входного тока $\underline{I}_{1(3)}$ на частоте третьей гармоники равен

$$\varphi_{(3)} = \psi_{u_{(3)}} - \psi_{i_{1(3)}} = (-12^\circ) - (-30,4^\circ) = 18,4^\circ.$$

Мощность, потребляемая цепью на частоте третей гармоники напряжения

$$P_{(3)} = U_{(3)} I_{1(3)} \cos\varphi_{(3)} = \frac{10,8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,568}{\sqrt{2}} \cos 18,4^\circ = 2,91 \text{Вт};$$

5) определение мгновенного и действующего значений входного тока.

Суммируя мгновенные значения гармонических составляющих находим мгновенное значение входного тока:

$$i_1(t) = 1,04 + 3\sin(\omega t - 50,9^\circ) + 0,628\sin(2\omega t + 161,6^\circ) + 0,568\sin(3\omega t - 30,4^\circ) \text{ А.}$$

Действующего значений входного тока:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{1,04^2 + \frac{3^2 + 0,628^2 + 0,568^2}{2}} = 2,43 \text{ А};$$

6) определение коэффициента мощности.

Суммарная активная мощность, потребляемая резисторами:

$$P_{\Sigma R} = P_{R2} + P_{R3} = R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 24 \cdot 1,58^2 + 24 \cdot 1,06^2 = 60 + 27 = 87 \text{ Вт}$$

равна мощности, развиваемой источником несинусоидального напряжения,

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2} + P_{(3)} = 26 + 53,65 + 4,737 + 2,91 = 87,297 \text{ Вт.}$$

Коэффициент мощности цепи при несинусоидальном токе и напряжений:

$$\lambda = \frac{P}{U' \cdot I_1} = \frac{87}{38,9 \cdot 2,43} = 0,92,$$

что, как и следовало ожидать, меньше коэффициента мощности при синусоидальном режиме цепи на основной частоте, равного

$$\cos\varphi_{(1)} = \cos(18,4^\circ) = 0,948.$$

Ответ: $I_1 = 2,43$ А, $\lambda = 0,918$,

$$i_1(t) = 1,04 + 3\sin(\omega t - 50,9^\circ) + 0,628\sin(2\omega t + 161,6^\circ) +$$

$$+0,568\sin(3\omega t - 30,4^\circ) \text{ А.}$$

Задача 9.7

На входе цепи (рис. 9.14) действует источник напряжения, содержащий первую гармонику частоты $\omega = 10^3$ 1/с, а также третью и пятую гармонические составляющие. Между входом и нагрузкой $R_н$ =80 Ом включен электрический фильтр, у которого $L_1 = L_2 = 10$ мГн.

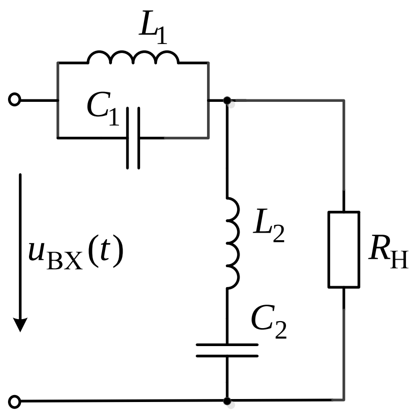


Рис. 9.14

Подобрать емкости конденсаторов C_1 и C_2 так, чтобы в нагрузке отсутствовали токи третьей и пятой гармоник. Определить отношение напряжений $U_н / U_{вх(1)}$ по первой гармонике.

Решение

Для того чтобы в нагрузке отсутствовали токи третьей и пятой гармоники, оба контура (последовательный и параллельный) должны быть настроены в резонанс: один − на частоте 3ω, другой − на частоте 5ω. Рассмотрим два решения.

1. Параллельный контур L_1C_1 настроен в резонанс на частоте 3ω:

$$\frac{1}{3\omega L_1} = 3\omega C_1 = \frac{1}{3\cdot 10^3 \cdot 10\cdot 10^{-3}} = \frac{1}{30} \text{ См.}$$

Отсюда $C_1 = 11{,}1$ мкФ.

На частоте 3ω сопротивление параллельного контура $\underline{Z}_1(3\omega) = \infty$ и, следовательно, третья гармоника тока будет равна нулю.

Последовательный контур L_2C_2 настроен в резонанс на частоте 5ω:

$$5\omega L_2 = \frac{1}{5\omega C_2} = 5\cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ Ом.}$$

Отсюда $C_2 = 4$ мкФ.

На частоте 5ω сопротивление последовательного контура равно нулю: $\underline{Z}_2(5\omega) = 0$ (резонанс напряжений). И поскольку параллельно сопротивлению нагрузки оказывается включенной ветвь с нулевым сопротивлением, то пятая гармоника тока в нагрузке равна нулю.

Для определения $U_н / U_{вх(1)}$ найдем значения $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ по первой гармонике:

$$\underline{Z}_1(\omega)=\frac{j\omega L_1\cdot\left(-j\,{}^{1}\!/_{\omega C_1}\right)}{j\omega L_1-j\,{}^{1}\!/_{\omega C_1}}=\frac{j10(-j90)}{j10-j90}=j11{,}25\ \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2(\omega)=j\omega L_2-j\,{}^{1}\!/_{\omega C_2}=j10-j250=-j240\ \text{ Ом.}$$

В результате имеем:

$$\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)=\frac{\underline{Z}_2R_\text{н}}{\underline{Z}_2+R_\text{н}}=\frac{(-j240)\cdot 80}{80-j240}=76e^{-j18{,}4^\circ}=72{,}1-\text{j}24\ \text{ Ом};$$

$$\frac{U_\text{н}}{U_{\text{вх}(1)}}=\frac{\left|\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)\right|}{\left|\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)+\underline{Z}_1(\omega)\right|}=\frac{|76|}{|72{,}1-j24+j11{,}25|}=\frac{76}{\sqrt{72{,}1^2+12{,}75^2}}=1{,}04.$$

2. Параллельный контур настроен в резонанс на частоте 5ω. Значит, величина емкости C_1 = 4 мкФ. Тогда резонанс напряжений должен наступать на частоте 3ω, следовательно, C_2 = 11,1 мкФ.

Сопротивления $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_{2\text{н}}$ на частоте ω:

$\underline{Z}_1(\omega)=j10{,}4$ Ом, $\underline{Z}_2(\omega)=-j80$ Ом, $\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)=40\sqrt{2}e^{-j45^\circ}=40-j40$ Ом.
Тогда

$$\frac{U_\text{н}}{U_{\text{вх}(1)}}=\frac{\left|\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)\right|}{\left|\underline{Z}_{2\text{н}}(\omega)+\underline{Z}_1(\omega)\right|}=1{,}13\ .$$

Ответ: C_1 = 11,1мкФ, C_2 = 4 мкФ или C_1 = 4 мкФ, C_2 =11,1 мкФ,
$\dfrac{U_\text{н}}{U_{\text{вх}(1)}}=1{,}04$ или $\dfrac{U_\text{н}}{U_{\text{вх}(1)}}=1{,}13$.

Задача 9.8

Определить мгновенное значение напряжения $u_{mn}(t)$ на зажимах источника тока и его активную и полную мощности (рис. 9.15), если задано: $1/\omega C$ = 20 Ом, $R_1 = R_2 = \omega L$ = 10 Ом, $j(t) = 6 + 1\cos\omega t$ А, $e(t) = 100 + 50\sin(2\omega t + 30)$ В.

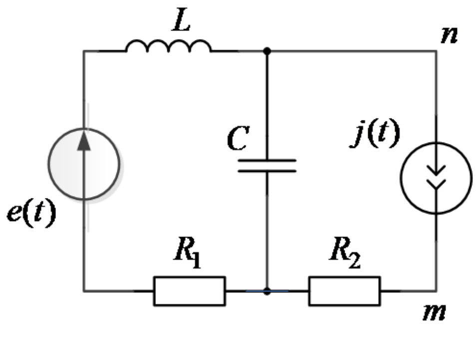


Рис. 9.15

Ответ: $u_{mn}(t) = 20 + 30\sin(\omega t + 90^\circ) + 35{,}4\sin(2\omega t + 75^\circ)$ В,
P = 135 Вт, S = 232,15 В·А.

Задача 9.9

На входе цепи (рис. 9.16) приложено напряжение $u(t) = 100 + 50\ \sin 3000t + 30\ \sin(9000t - 45°)$В; L = 10 мГн, $R_н = 100$ Ом.

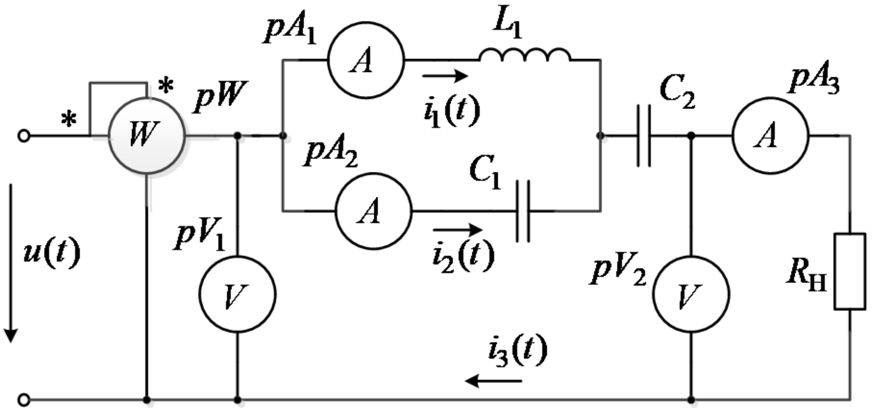


Рис. 9.16

Подобрать емкости конденсаторов C_1 и C_2 так, чтобы в нагрузке отсутствовали постоянная составляющая и третья гармоника напряжения, а первая гармоника проходила без искажения. Определить мгновенные значения токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ и показания ваттметра и амперметров, вольтметров электродинамической системы.

Ответ: $C_1 = 1{,}235$ мкФ, $C_2 = 9{,}876$ мкФ;
$i_1(t) = 0{,}562\sin(3000t) + 0{,}333\sin(9000t - 135°)$ А,
$i_2(t) = 0{,}062\sin(3000t - 180°) + 0{,}333\sin(9000 + 45°)$ А,
$i_3(t) = 0{,}5\sin 3000t$, А; $pA_1 = 0{,}46$ А, $pA_2 = 0{,}24$ А,
$pA_3 = 0{,}354$ А, $pV_1 = 108$ В, $pV_2 = 35{,}4$ В, $pW = 12{,}5$ Вт.

Задача 9.10

Вольтметр электромагнитной системы при измерении напряжения, форма которого показана на рис. 9.17, показывает 10 В.

Найти показание вольтметра магнитоэлектрической системы.

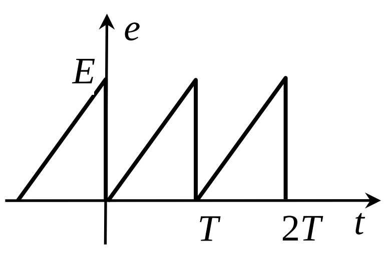


Рис. 9.17

Ответ: $5\sqrt{3}$ В.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В практикуме рассмотрены примеры и приведены задачи для самостоятельного решения по дисциплине «Теоретические основы электротехники», которые могут быть использованы на практических занятиях и в самостоятельной работе студентов при изучении следующих тем: «Цепи постоянного тока», «Методы анализа линейных электрических цепей синусоидального и несинусоидального токов», «Трехфазные цепи», «Цепи с взаимной индукцией» и «Резонансные явления».

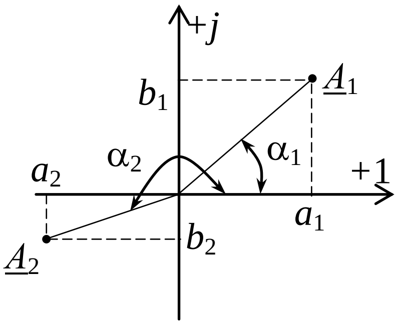
Для студентов, обучающихся по электротехническим направлениям и специальностям, данные темы составляют предмет изучения курса ТОЭ в первом семестре знакомства с дисциплиной. При движении от простого к сложному происходит освоение различных методов расчета электрических цепей на примере анализа линейных цепей в установившихся режимах.

Дальнейшее изучение дисциплины потребует от студентов умения использовать эти методы при анализе переходных режимов и нелинейных электрических и магнитных цепей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи. СПб.: Лань, 2009. 592 с. Режим доступа: URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=95
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для студентов вузов. 12-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2014. 701 с.
3. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов/ К. С. Демирчян и др. В 3 т. Т. 1. 4-е изд. СПб.: Питер, 2003. 463 с.
4. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К. С. Демирчян и др. В 3 т. Т. 2. 4-е изд. СПб.: Питер, 2003. 576 с.
5. Лукманов В. С. Теоретические основы электротехники. Ч. I. Теория линейных электрических цепей: учеб. пособие / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2005. 120 с.
6. Лукманов В. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. Теория линейных и нелинейных электрических и магнитных цепей: учеб. пособие / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. 219 с.
7. Теоретические основы электротехники. Справочные материалы: справочник / И. Е. Чечулина и др.; Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. 83 с.
8. Теоретические основы электротехники: тестовые задания: учеб. пособие/ В. С. Лукманов и др.; Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2017. 201 с. Режим доступа: URL: http://e-library.ufa-rb.ru/dl/lib_net_r/Lukmanov_Teor_osnovy_elektrotekhniki_2017.pdf.
9. Чечулина И. Е., Вавилова И. В., Лукманов В. С. Теоретические основы электротехники. Руководство по самостоятельному изучению дисциплины: учеб.-метод. пособие / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2018. 127с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Комплексные числа и операции над ними	
$j=\sqrt{-1}$ $\quad j^2=-1,\quad -j^2=-1,\quad \frac{1}{j}=-j,\quad e^{j90^\circ}=j,\quad e^{-j90^\circ}=-j$	
 	$\underline{A}=a+jb=Ae^{j\alpha}$ $a=A\cdot\cos\alpha$ $b=A\cdot\sin\alpha$ $A=\sqrt{a^2+b^2}$ $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$, если $a>0$, $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}\pm180^\circ$, если $a<0$.
Операции сложения и вычитания Производятся над числами только в алгебраической форме	$\underline{A}_1+\underline{A}_2=(a_1+jb_1)+(a_2+jb_2)=$ $=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2)$; $\underline{A}_1-\underline{A}_2=(a_1+jb_1)-(a_2+jb_2)=$ $=(a_1-a_2)+j(b_1-b_2)$
Операция умножения	$\underline{A}_1\cdot\underline{A}_2=(a_1+jb_1)\cdot(a_2+jb_2)=$ $=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+j(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2)$ $\underline{A}_1\cdot\underline{A}_2=A_1e^{j\alpha_1}\cdot A_2e^{j\alpha_2}=A_1\cdot A_2\cdot e^{j(\alpha_1+\alpha_2)}$
Операция деления	$\frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2}=\frac{(a_1+jb_1)}{(a_2+jb_2)}\cdot\frac{(a_2-jb_2)}{(a_2-jb_2)}=$ $=\frac{(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)}{a_2^2+b_2^2}+j\frac{(a_2\cdot b_1+a_1\cdot b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ $\frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2}=\frac{A_1e^{j\alpha_1}}{A_2e^{j\alpha_2}}=\frac{A_1}{A_2}\cdot e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}$
Операция возведения в степень Производится над числами только в показательной форме	$\underline{A}^n=(Ae^{j\alpha})^n=A^ne^{jn\alpha}$ $\sqrt{\underline{A}}=\sqrt{Ae^{j\alpha}}=\sqrt{A}\cdot e^{j\frac{\alpha}{2}}$

Учебное издание

ЧЕЧУЛИНА Ирина Евгеньевна
ФАТХИЕВ Альберт Рифгатович
ЛУКМАНОВ Виталий Сабирович

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ

Редактор *О. А. Соколова*
Компьютерная верстка *О. А. Соколова*
Оформление обложки *О. М. Толкачёва*

Подписано в печать ___.___.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 10,7. Тираж 000 экз. Заказ №
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»
Редакционно-издательский комплекс УГАТУ
450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.